MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 19/8 2020, kl 9.00-14.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. *Låt parametern a vara lika med numret på din födelsemånad (t.ex. om du är född i september så är $a = 9$ för dig)*

   Lösningsförslaget skrivs med parametern, för att ha alla olika varianter med.

1. *Undersök följande gränsvärden och beräkna dem i förekommande fall:* *5 p*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} \qquad \lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}.$$

Kommentar: den första funktionen är alltså $e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = \exp\left(\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}\right)$.

Vi börjar med att konstatera att $x^2 + 2xy + 2y^2 \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$. För att avgöra hur $\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}$ beter sig, måste vi avgöra tecknet hos $x^2 + 2xy + 2y^2$. En möjlighet är kvadratkomplettering $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 \geq 0$. Alltså får vi $\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2} \to -\infty$ då $(x, y) \to (0, 0)$ och därmed $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = 0$.

I det andra fallet ser vi genom kvadratkomplettering att $-(x^2 + 4xy + 3y^2)$ är en indefinit kvadratisk form och därmed existerar gränsvärdet inte. Vi kan också kolla direkt längs olika linjer

$$\begin{aligned}
(x, y) = (t, 0) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{-t^2} \to 0 \quad \text{då } t \to \infty,\\
(x, y) = (-2t, t) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{t^2} \to \infty \quad \text{då } t \to \infty,\\
(x, y) = (t, -t) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{0} \to 1 \quad \text{då } t \to \infty,
\end{aligned}$$

alltså existerar gränsvärdet $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}$ inte.

Svar: $\underline{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = 0}$ och $\underline{\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)} \text{ finns inte.}}$

2. *Betrakta funktionen $G(x, y, z) = xy - xz - yz + axyz$, där parametern a har värdet från fråga 0.*

   (a) *Bestäm alla stationära punkter till G samt deras karaktär.* *4 p*

   (b) *Avgör om G antar största och/eller minsta värde i mängden* *1 p*

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(a) Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & y - z + ayz = 0 \\ (II) & G'_y & = & x - z + axz = 0 \\ (III) & G'_z & = & -x - y + axy = 0. \end{array}$$

Vi försöka lösa ekvationssystemet genom att eliminiera de icke-linjära termerna, t.ex. genom $x \cdot (i) - y \cdot (II) = 0$. Det ger oss ekvationen

$$z(-x + y) = 0.$$

Alltså finns det två fall: $z = 0$ eller $y = x$. Vi betrakta först $z = 0$, då blir ekvationssystemet:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & y = 0 \\ (II) & G'_y & = & x = 0 \\ (III) & G'_z & = & -x - y + axy = 0 \end{array}$$

och vi har fått en stationär punkt $(0, 0, 0)$. I det andra fallet, $y = x$, blir ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & x - z + axz = 0 \\ (II) & G'_y & = & x - z + axz = 0 \\ (III) & G'_z & = & -2x + ax^2 = 0. \end{array}$$

Ekvation (III) har två lösningar, $x = 0$ som leder till samma stationär punkt, som vi redan har hittat, eller $x = \frac{2}{a}$. Ur ekvation (I) får vi $z = -\frac{2}{a}$, dvs stationära punkten $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$. OBS: $a \neq 0$, ty det är numret på en måndad.

Vi har alltså fått två stationära punkter $(0, 0, 0)$ och $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$. För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$G''_{xx} = G''_{yy} = G''_{zz} = 0$$

$$G''_{xy} = G''_{yx} = 1 + az \qquad G''_{xz} = G''_{zx} = -1 + ay \qquad G''_{yz} = G''_{zy} = -1 + ax$$

För $(0, 0, 0)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k, \ell) = 2hk - 2h\ell - 2k\ell$. Den är indefinit, ty $Q(1, 1, 0) = 2 > 0$ medan $Q(1, -1, 0) = -2 < 0$ och därmed är $(0, 0, 0)$ en sadelpunkt. För den andra stationära punkten är den kvadratiska formen $Q(h, k, \ell) = -2hk + 2h\ell + 2k\ell$ och därmed också indefinit.

(b) Funktionen G är kontinuerlig och mängden K kompakt, alltså antar G i K både största och minsta värde.

Svar: (a) Stationära punkterna är $(0, 0, 0)$ och $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$ och dessa är sadelpunkter.

(b) Största och minsta värde antas.

3. Låt $h(x,y) = \dfrac{e^{-(x+y)}}{1+x^2+y^2}$.

(a) Betrakta mängden *4 p*

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \textit{ och } y \geq 0\}.$$

i. Avgör om funktionen h antar största och/eller minsta värde i området D_1 och bestäm dessa i förekommande fall.

ii. Ange värdemängden av h i området D_1, dvs ange mängden av alla värden som h antar i D_1, och motivera hur du har kommit fram till denna mängd.

(b) Avgör om funktionen h antar största och/eller minsta värde i området *1 p*

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}.$$

(a) i. Vi konstatera att mängden D_1 är den slutna första kvadranten, dvs en sluten men ej begränsad mängd. Funktionen h är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd.

Minsta värde: Vi ser direkt att $h(x,y) > 0$ för alla (x,y). Men vi har också att t.ex. $h(x,0) = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \to 0$ då $x \to \infty$, dvs att det antas värden godtyckligt nära 0. Därmed kan det inte finnas ett minsta värde.

Största värde: Vi observera att, eftersom $x \geq 0$ och $y \geq 0$ så gäller

$$0 < h(x,y) \leq \frac{e^0}{1+x^2+y^2}.$$

I och med att $\frac{1}{1+x^2+y^2} \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ följer enligt instängningsregeln att även

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} h(x,y) = 0.$$

Det betyder att för varje $\epsilon > 0$ kan vi kan hitta ett tal R sådan att $h(x,y) < \epsilon$ för alla (x,y) sådana att $x^2+y^2 > R^2$. Ett lämpligt epsilon är då mindre än funktionsvärdena i alla stationära punkter (det finns bara ändligt många). Om vi nu betraktar den kompakta mängden $K := \{(x,y) \in D_1 : x^2+y^2 < R^2\}$ så vet vi att å ena sidan så är h utanför K mindre än ϵ och å andra sidan vet vi att den kontinuerliga funktionen h antar ett största värde i K, dock inte på randen av cirkelbågen. Eftersom ϵ är mindre än detta största värde (enligt hur vi har valt det) är därmed största värdet i K även största värde i D_1.

För att bestämma största värdet börjar vi med att bestämma stationära punkterna:

$$\begin{aligned} h'_x &= \frac{e^{-(x+y)}[-(1+x^2+y^2)-2x]}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ h'_y &= \frac{e^{-(x+y)}[-(1+x^2+y^2)-2y]}{(1+x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Subtraktion av dessa två ekvationer leder till $x = y$. Om man stoppar det in i t.ex. den första ekvationen, så får man (efter lite omskrivning!) $2x^2+2x+1$, en ekvation som saknar (reella) lösningar. Alltså finns inga stationära punkter i det inre av K.

Randen av K består av tre delar: cirkelbågen, en del av x-axeln och en del av y-axeln. Enligt vår argumentation ovan kan största värdet inte antas på cirkelbågen och det återstår bara att kolla sträckorna $(0,t)$ och $(t,0)$, i båda fall för $t \in [0,R]$. Vi betrakta hjälpfunktionen

$$\widetilde{h}(t) := h(0,t) = h(t,0) = \frac{e^-t}{1+t^2} \quad \text{då } t \in [0,R].$$

Vi får $\widetilde{h}'(t) = \ldots = -e^{-t}\frac{(t+1)^2}{(1+t^2)^2} \geq 0$ och därmed inga lokala extrempunkter i det inre av sträckan. Därmed antas största värdet i hörnpunkten: $h(0,0) = 1$.

ii. Vi har fått att största värdet är 1 och minsta värdet saknas, men vi vet att alla funktionsvärden är större än 0 och att det antas värden godtyckligt nära 0. Funktionen h är kontinuerlig och har därmed egenskapen om mellanliggande värden. Därmed är värdemängden det hela halvöppna intervallet $(0, 1]$.

(b) Minsta värdet saknas pga samma argument som i (a). Men nu saknas även största värdet, ty hela x-axeln ligger i defininitionsmängden och vi har $h(x, 0) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ växer över alla gränser då $x \to -\infty$.

Svar: (a) i. Minsta värde saknas, största värde 1. ii. intervallet $(0, 1]$
(b) båda största och minsta värdet saknas.

4. *Undersök om funktionen $f(x, y) = x + y$ antar största och/eller minsta värde på kurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 7$ med $y \geq 0$ och bestäm dessa i så fall.* 5 p

(a) Kurvan är den delen av andragradskurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 7$ som ligger i slutna första och andra kvadranten av planet. För att kolla vilken sorts kurva det handlar om använder vi kvadratkomplettering

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{7}{4}y^2.$$

Andragradskurvan $(x+\frac{y}{2})^2+\frac{7}{4}y^2 = 7$ är alltså begränsad och därmed en ellips. Den delen som vi är intresserade av är även sluten, alltså kompakt. Eftersom funktionen f är kontinuerlig antar den alltså både största och minsta värde på kurvan. För att bestämma dessa börjar vi med att kolla nödvändiga villkor för inre punkter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x + y \\ 1 & x + 4y \end{vmatrix} = 0.$$

Detta ger $x = 3y$ och genom att stoppa denna relation i bivillkoret får vi (efter lite räkning) ekvationen $y^2 = \frac{1}{2}$ och därmed endast $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ty den andra lösningen $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ inte uppfyller bivillkoret $y \geq 0$). Motsvarande x-koordinat är $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ och funktionsvärdet i denna punkt blir $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}) = \ldots = 2\sqrt{2}$. Kurvans randpunkter hittar vi genom att sätta $y = 0$ och får då två punkter $(\pm\sqrt{7}, 0)$ med motsvarande funktionsvärden $\pm\sqrt{7}$. Största och minsta värde finns nu bland följande värden: $\pm\sqrt{7}, 2\sqrt{2}$. Därmed är

Svar: (a) största värdet $2\sqrt{2}$ och minsta värdet $-\sqrt{7}$.

5. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$(x - y)(F''_{xx} + F''_{yy} - 2F''_{xy}) - 2(F'_x - F'_y) = (x - y)^3$$

till exempel genom variabelbytet $u = xy$ och $v = x + y$. 5 p

(a) Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(u, v) := F(x, y)$. Vi får

$$u'_x = y \quad u'_y = x \quad \text{och } v'_x = v'_y = 1.$$

Användning av kedjeregeln för partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_x &= \widetilde{F}'_u y + \widetilde{F}'_v \\ F'_y &= \widetilde{F}'_u x + \widetilde{F}'_v. \end{aligned}$$

För andraderivatorna behövs både kedjeregeln och produktregeln, exempelvis:

$$F''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} F'_x = \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{F}'_u y + \widetilde{F}'_v) = \frac{\partial \widetilde{F}'_u}{\partial y} \cdot y + \widetilde{F}'_u + \frac{\partial \widetilde{F}'_v}{\partial y} = \left(\widetilde{F}''_{uu} u'_y + \widetilde{F}''_{uv} v'_y\right) \cdot y + \widetilde{F}'_u + \widetilde{F}''_{vu} u'_y + \widetilde{F}''_{vv} v'_y$$

och därmed

$$\begin{aligned} F''_{xx} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu} y^2 + 2\widetilde{F}''_{uv} y + \widetilde{F}''_{vv} \\ F''_{xy} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu} xy + \widetilde{F}''_{uv}(x + y) + \widetilde{F}''_{vv} + \widetilde{F}'_u \\ F''_{yy} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu} x^2 + 2\widetilde{F}''_{uv} x + \widetilde{F}''_{vv}. \end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen leder till den nya ekvationen

$$\widetilde{F}''_{uu} = 1.$$

Att integrera två gånger ger $\widetilde{F}(u,v) = \frac{u^2}{2} + u \cdot \varphi(v) + \psi(v)$, där φ och ψ är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner. Därmed får vi $\underline{F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy \cdot \varphi(x+y) + \psi(x+y)}$.

6. *(a) Visa att serien* *2 p*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln(k^2+1) - 2\ln k\big)$$

är konvergent.

(b) Undersök om serien *1 p*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln(k+1) - \ln k\big)$$

är konvergent.

(c) Undersök om den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^{\infty} \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx$$

är konvergent. Motivera ordentligt, dvs om du använder en sats så redogör för vad satsen säger och hur du kollar förutsättningarna.

(a) Termerna i serien kan skrivas om till $\ln(k^2+1) - 2\ln k = \ldots = \ln(1+\frac{1}{k^2})$ och vi kan använda t.ex. JFK II och jämför med $\frac{1}{k^2}$. Eftersom

$$\frac{\ln(k^2+1) - 2\ln k}{\frac{1}{k^2}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{k^2})}{\frac{1}{k^2}} \to 1 \quad \text{då } k \to \infty$$

är serien konvergent, ty serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent. OBS $\ln(k^2+1) - 2\ln k > 0$.

(b) Samma typ av omskrivning och jämförelse med $\frac{1}{k}$ visar att serien är divergent.

(c) Integralen är generaliserad i $x = 0$ och eftersom integrationsintervallet är obegränsat. Därför delar vi upp integralen, t.ex. som

$$\int_0^1 \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx + \int_1^{\infty} \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx.$$

I den första integralen är bara integrandens andra termen obegränsad, men explicit räkning (ej gjort här!) visar att $\int_0^1 \ln x dx$ är konvergent och därmed är hela första integralen konvergent.

För den andra integralen kan vi antingen använda JFKII för integraler på liknande sätt som i (a) eller så använder vi Cauchys integralkriteriet, då vi vet att serien i (a) är konvergent. Då måste vi alltså kolla att funktionen $f(x) := \ln(x^2+1) - 2\ln x$ är icke-negativ och avtagande. Vi ser direkt $f(x) = \ldots = \ln(1+\frac{1}{x^2}) > 0$ och eftersom $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \big(-\frac{2}{x^3}\big) < 0$ för $x > 1$ är f avtagande.

Därmed har den andra integralen samma konvergensbeteende som serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, vilket är den konvergenta serien från (a).

Svar: (a) konvergent (b) divergent (c) konvergent.