Lösningar till tentamen

Analys A,
20-10-14.

1.a) Detta är en så kallad teleskoperande serie. Partialsumman s_N kan förenklas enligt följande:

$$s_N = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k+1) - \ln k) =$$

$$\ln 2 + (\ln(3) - \ln 2) + \ldots + (\ln(N+1) - \ln N)$$

$$= \ln(N+1) \to \infty \quad \text{när} \quad N \to \infty.$$

Serien är alltså divergent. (Det går även att visa detta genom att använda jämförelsekriterium II och jämföra med serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.)

b) Integralen är generaliserad i både 0 och ∞. Vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}},$$

och undersöker konvergensen hos var och en av delarna. Eftersom

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x}{x+x^4}} = 1,$$

så följer att

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ konvergent},$$

enligt jämförelsekriterium II. Eftersom den högra integralen är konvergent (med värdet 2) så är även den vänstra det.

För den andra delen kan vi också använda jämförelsekriterium II, fast vi nu jämför med integranden x^{-2} i stället. Eftersom

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{x^4}{x+x^4}} = 1,$$

så följer att

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ konvergent},$$

enligt jämförelsekriterium II. Eftersom den högra integralen är konvergent (med värdet 1) så är även den vänstra det. (Det går även bra att använda jämförelsekriterium I.)

Sammanfattningsvis konvergerar båda delarna och den ursprungliga integralen är alltså konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x = y$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2+0+0)}{\ln(1+t^2+0)} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2+t^2+t^2)}{\ln(1+t^2+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2+O(t^4)}{2t^2+O(t^4)} = \frac{3}{2},$$

där vi har MacLaurin-utvecklat $\ln(1+u) = u + O(u^2)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Vi observerar först olikheterna

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \le x^2+xy+y^2 \le 2(x^2+y^2),$$

som vidare ger att

$$\frac{1}{2}(1+x^2+y^2) \le 1+x^2+xy+y^2 \le 2(1+x^2+y^2),$$

och till sist

$$\frac{\ln(\frac{1}{2}(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} \le \frac{\ln(1+x^2+xy+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)} \le \frac{\ln(2(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)}.$$

Med logaritmlagarna kan vi beräkna gränsvärdena av ytterleden:

$$\frac{\ln(\frac{1}{2}(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} = -\frac{\ln 2}{\ln(1+x^2+y^2)} + 1 \to 1,$$

$$\frac{\ln(2(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+x^2+y^2)} + 1 \to 1.$$

Enligt instängningslagen följer att också det ursprungliga gränsvärdet blir 1.

3. Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

På operatorform kan vi skriva

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Andraderivatorna kan nu skrivas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i den ursprungliga ekvationen ger efter förenklingar (och med observationen att $H.L. = (x-y)^2 = u^2$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2.$$

Vi integrerar två gånger m a p v:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = u^2 v + \phi(u) \Leftrightarrow f = \frac{u^2 v^2}{2} + \phi(u)v + \psi(u),$$

där ϕ och ψ är två stycken två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner. Återgång till de ursprungliga variablerna ger slutligen

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2 y^2}{2} + \phi(x-y)y + \psi(x-y).$$

4.a) Vi observerar först att $\lim_{x\to\infty} f(x,0,0) = \lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$, vilket visar att $\sup f = \infty$ och att maximum inte kan antas. För att visa att minimum faktiskt antas räcker det att visa att $\lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} f(x,y,z) = \infty$. Vi gör detta genom att konstruera en funktion $g(r)$ sådan att $g(r) \to \infty$ då $r \to \infty$ och $f(x,y,z) \geq g(r)$, där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Observera först att i varje punkt (x,y,z) måste gälla att någon av kvadraterna x^2, y^2, z^2 är större än $\frac{1}{3}r^2$. Det följer att någon av termerna x^4, y^4, z^4 måste vara större än $(\frac{1}{3}r^2)^2 = \frac{1}{9}r^4$, vilket ger olikheten $x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{9}r^4$. Å andra sidan vet vi att $|x| \leq r, |y| \leq r, |z| \leq r$, vilket leder till att $|xy+yz+zx| \leq |x||y|+|y||z|+|z||x| \leq 3r^2$. Den omvända triangelolikheten ger nu att

$$x^4+y^4+z^4-2(xy+yz+zx) \geq \frac{1}{9}r^4 - 6r^2 \to \infty,$$

vilket visar påståendet.

b) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 4x^3-2y-2z = 0, \\ f'_y &= 4y^3-2x-2z = 0, \\ f'_z &= 4z^3-2y-2x = 0. \end{cases}$$

Eftersom det var givet att $x = y = z = t$ så reduceras alla tre ekvationerna till $4t^3 - 4t = 0$ med de tre rötterna $t = -1, 0, 1$, vilket ger de tre stationära punkterna $(-1,-1,-1)$, $(0,0,0)$ och $(1,1,1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(0,0,0)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = f''_{zz}(0,0) = 0$ och $f''_{xy}(0,0) = f''_{yz}(0,0) = f''_{zx}(0,0) = -2$. Detta ger den kvadratiska formen $Q(h,k,l) = -4hk - 4kl - 4lh$ som är indefinit (t ex gäller ju att $Q(1,1,0) = -4$ medan $Q(-1,1,0) = +4$). $(0,0,0)$ är alltså en sadelpunkt.

Vi kan göra på samma sätt med de två övriga stationära punkterna, men det är enklare att observera att vi från a) vet att funktionen antar globalt min, och eftersom den är partiellt deriverbar måste min-värdet antas i någon av de stationära punkterna. Det kan inte vara i $(0,0,0)$ som ju är en sadelpunkt, och eftersom $f(-1,-1,-1) = f(1,1,1) = -3$ så måste båda de övriga vara globala, alltså speciellt lokala, minpunkter. (För den som valt den andra metoden blir den kvadratiska formen i båda minpunkterna för övrigt lika med $Q = 12h^2+12k^2+12l^2-4hk-4kl-4lh = 12\left(h-\frac{k}{6}-\frac{l}{6}\right)^2 + \frac{35}{3}\left(k-\frac{l}{5}\right)^2 + \frac{56l^2}{5}$ som är positivt definit.)

5. Bivillkoret ger en kompakt mängd: den är sluten och då $\lim_{x^2+y^2\to\infty}(x^4-xy+y^4) \geq \lim_{x^2+y^2\to\infty}(x^4-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+y^4) = \infty$, så måste varje nivåkurva vara begränsad, speciellt gäller detta för kurvan $x^4-xy+y^4 = 1$. Enligt satsen om extremvärden måste största och minsta värde antas.

För att hitta extrempunkterna beräknar vi $\nabla f = (1,1)$ och $\nabla g = (4x^3-y, 4y^3-x)$ där $g(x,y) = x^4-xy+y^4-1$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4x^3-y & 4y^3-x \end{vmatrix} = (4y^3-x)-(4x^3-y)$$

$$= 4(y^3-x^3)+(y-x) = (y-x)(4(x^2+xy+y^2)+1).$$

Eftersom $x^2+xy+y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+(x+y)^2) \geq 0$ så kan den andra faktorn aldrig vara 0. Det följer att de enda möjliga extrempunkterna måste uppfylla $x = y$. Insättning i bivillkoret ger ekvationen $2x^4 - x^2 = 1$. Med $t = x^2$ får vi $2t^2 - t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{1}{2}$. Eftersom $t = x^2 \geq 0$ återstår bara möjligheten $t = x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, vilket ger punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$. Vi ser nu att $f(1,1) = 1+1 = 2$ måste vara det största värdet och att $f(-1,-1) = -1-1 = -2$ måste vara det minsta värdet.

6 & 7. För teorifrågorna hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm/201014/