Lösningar till tentamen

Analys A,
20-11-18.

1.a) I detta fall gäller att

$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k\sqrt{k}$$

inte existerar, vilket betyder att serien inte kan vara konvergent.

b) Här ser vi i stället att följden $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ är monotont avtagande, och att

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=0.$$

Eftersom serien är alternerande, följer det av Leibniz kriterium att den är konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x=y$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2+0+0}-1}{e^{t^2+0}-1}=\lim_{t\to 0}1=1.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2+t^2+t^2}-1}{e^{t^2+t^2}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2+O(t^4)}{2t^2+O(t^4)}=\frac{3}{2},$$

där vi har MacLaurin-utvecklat $e^u-1=u+O(u^2)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Det är lättare att se vad som händer om vi förlänger med $e^{-x^2-y^2}$:

$$\frac{e^{x^2+xy+y^2}-1}{e^{x^2+y^2}-1}=\frac{e^{xy}-e^{-x^2-y^2}}{1-e^{-x^2-y^2}}.$$

Eftersom $e^{-x^2-y^2}\to 0$ så går nämnaren mot 1. Men faktorn e^{xy} går mot 1 längs koordinataxlarna och mot $+\infty$ längs linjen $x=t, y=t$. Det följer att täljaren, och därför hela funktionen, saknar gränsvärde precis som i a).

3. Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ytterligare en derivation ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

På samma sätt beräknas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i H.L. och V.L. ger nu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},$$

dvs vi erhåller ekvationen

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=2\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Vi delar med 2 och sätter $g=\frac{\partial f}{\partial u}$. Då uppfyller g ekvationen

$$2\frac{\partial g}{\partial v}=g\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{1}{2}g=0.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $I=e^{-v/2}$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(e^{-v/2}g\Big)=0\Leftrightarrow e^{-v/2}g=\phi(u)\Leftrightarrow g=\phi(u)e^{v/2},$$

för någon godtycklig funktion $\phi(u)$ av u. Om vi går tillbaka till f får vi alltså

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\phi(u)e^{v/2}\Leftrightarrow f=\Phi(u)e^{v/2}+\Psi(v),$$

där $\Phi(u)$ är en primitiv till $\phi(u)$ och $\Psi(v)$ är en godtycklig funktion av v. Återgång till de ursprungliga variablerna x,y ger till sist

$$f(x,y)=\Phi(x+y)e^{(x-y)/2}+\Psi(x-y),$$

där Φ och Ψ är två godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

4.a) Om vi betraktar linjen $x=y=z=t$ ser vi att

$$g(t)=f(t,t,t)=9t^2-6t^3$$

går mot $\mp\infty$ då $t\to\pm\infty$. Det följer att $f(x,y,z)$ inte kan anta något största eller minsta värde.

b) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 2(x+y+z)-6yz=0,\\ f'_y &= 2(x+y+z)-6xz=0,\\ f'_z &= 2(x+y+z)-6xy=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Eftersom de första termerna i dessa ekvationer är lika så blir även de sista lika, dvs

$$6yz = 6xz = 6xy \Leftrightarrow yz = xz = xy. \qquad (2)$$

Vi visar nu att dessa villkor medför att $x = y = z$. Om vi t ex tar den första likheten, $yz = xz$, så kan denna skrivas som $(y-x)z = 0$. Vi ser att antingen gäller att $x = y$ eller så måste $z = 0$. Men om $z = 0$ så ser vi från (2) att då blir även $xy = 0$, dvs $x = 0$ eller $y = 0$. Om nu både $y = 0$ och $z = 0$ så följer av den första ekvationen i (1) att även $x = 0$. På samma sätt leder antagandet att $y \neq z$ eller att $x \neq z$ till $x = y = z = 0$. Slutsatsen blir alltså att den enda möjligheten är att $x = y = z$.

Om vi sätter in $x = y = z = t$ i vilken som helst av de tre derivatorna så reduceras denna till $2(t + t + t) - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t - t^2 = 0$ med de två rötterna $t = 0, 1$, vilket ger de två stationära punkterna $(0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(1, 1, 1)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(1, 1, 1) = f''_{yy}(1, 1, 1) = f''_{zz}(1, 1, 1) = 2$ och $f''_{xy} = 2-6z \Rightarrow f''_{xy}(1, 1, 1) = -4$, $f''_{yz} = 2-6x \Rightarrow f''_{yz}(1, 1, 1) = -4$, $f''_{xz} = 2 - 6y \Rightarrow f''_{xz}(1, 1, 1) = -4$. Detta ger den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = 2h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 8hk - 8kl - 8lh =$$

$$(h - 2k - 2l)^2 - 3(k + 2l)^2 + 9l^2,$$

som är indefinit. $(1, 1, 1)$ är alltså en sadelpunkt.

Om vi nu betraktar punkten $(0, 0, 0)$ så är det lätt att se att den associerade kvadratiska formen är $Q = (h + k + l)^2$ som är semidefinit. Vi kan alltså inte direkt dra någon slutsats. Men det ligger nära tillhands att studera planet $x + y + z = 0$. En linje i detta plan som går genom $(0, 0, 0)$ ges av $x = t, y = t, z = -2t$. Insatt i $f(x, y, z)$ får vi funktionen

$$h(t) = f(t, t, -2t) = 12t^3.$$

Eftersom denna funktion antar både strikt positiva och strikt negativa värden godtyckligt nära origo så måste även denna punkt vara en sadelpunkt.

Anmärkning: I efterhand kan vi konstatera att vi har ytterligare ett bevis för att funktionen inte kan anta max eller min: Det finns helt enkelt inga stationära punkter där max eller min skulle kunna antas!

5. Det är klart att det måste finnas någon punkt som minimerar avståndet till origo: vi observerar att det räcker att minimera avståndsfunktionen över skärningen av kurvan med en (kompakt) cirkelskiva som är tillräckligt stor för att innehålla någon punkt på kurvan för att erhålla minimum. Existensen av minimum följer därför av satsen om extremvärden.

För att visa att maximum inte antas räcker det att observera att det för varje x finns ett y sådant att punkten $P = (x, y)$ ligger på kurvan. Detta följer av att den reella tredjegradsekvationen $xy^3 + x^3y = 2$ för y alltid har en lösning (utom då $x = 0$). Eftersom avståndet från P till origo alltid är större $|x|$, som kan väljas godtyckligt stort, följer att det inte finns något maximalt anstånd till origo.

För att hitta extrempunkterna betraktar vi $f(x, y) = x^2+y^2$ (avståndsfunktionen i kvadrat) och beräknar $\nabla f = (2x, 2y)$ och $\nabla g = (y^3 + 3x^2y, 3xy^2 + x^3)$ där $g(x, y) = xy^3 + x^3y - 2$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y^3 + 3x^2y & 3xy^2 + x^3 \end{vmatrix} =$$

$$2x(3xy^2 + x^3) - 2y(y^3 + 3x^2y) = 2x^4 - 2y^4.$$

Vi får $x^4 = y^4$ som ger att $x = y$ eller $x = -y$.
Fallet $x = y$: Insatt i bivillkoret får vi $y^4 + y^4 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$, vilket ger punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.
Fallet $x = -y$: Insatt i bivillkoret får vi ekvationen $-y^4 - y^4 = 2$, som saknar lösning.
Vi ser nu att $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1^2 + 1^2 = 2$ är det enda möjliga extremvärdet som alltså måste vara det globala min-värdet. Det kortaste avståndet blir därför roten ur detta, dvs $\sqrt{2}$.

/Martin Tamm/201118/