Lösningar till tentamen

Matematisk för Naturvetenskaper I, 190117.

1.a) Både täljare och nämnare blir noll då $x = 3$, vilket enligt faktorsatsen ger att båda är delbara med $x - 3$. En enkel räkning ger att $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ och $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Vi får därför att

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+5}{x+3} = \frac{3+5}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

b) Det förenklar att göra variabelbytet $x = t+1, t = x-1$. Vi får

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x}-e^2}{\ln x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t+2}-e^2}{\ln(t+1)} =$$

$$e^2 \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{\ln(t+1)} =$$

$$e^2 \lim_{t\to 0} 2 \cdot \frac{\frac{e^{2t}-1}{2t}}{\frac{\ln(t+1)}{t}} = 2e^2 \cdot \frac{1}{1} = 2e^2.$$

Här har vi använt standardgränsvärdena

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \text{ och } \lim_{s\to 0} \frac{e^s-1}{s} = 1,$$

där $s = 2t$.

2. Vi beräknar först ekvationssystemets determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2a - a^2.$$

Ekvationen $2a - a^2 = 0$ har nollställena $a = 0$ och $a = 2$. För alla andra värden på a kommer systemet enligt teorin att ha en entydig lösning.
Vi undersöker de två specialfallen separat:
$a = 0$. Vi kan skriva systemet på utvidgad matrisform på följande sätt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det framgår av trappformen att systemet har oändligt många lösningar.
$a = 2$. Vi kan skriva systemet på utvidgad matrisform på följande sätt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -17 \\ 0 & -3 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 17/5 \\ 0 & 1 & 0 & 7/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 0 & -16/15 \end{array}\right)$$

Här visar den understa raden att systemet saknar lösning.

3. Vi beräknar först derivatan:

$$f'(x) = D\left(2\ln x - 5\arctan x\right) =$$

$$\frac{2}{x} - \frac{5}{1+x^2} = \frac{2x^2-5x+2}{x(1+x^2)}.$$

Nollställen till f' är alltså lösningar till ekvationen $2x^2 - 5x + 2 = 0$, dvs $x = \frac{1}{2}$ och $x = 2$, varav endast den första ligger i intervallet. Vi får följande teckentabell:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$-2\ln 2 - 5\arctan\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Vi noterar att $x = \frac{1}{2}$ är ett globalt maximum med max-värde $-2\ln 2 - 5\arctan\frac{1}{2}$. Däremot antar funktionen inte något minimum eftersom

$$\lim_{x\to 0+} (2\ln x - 5\arctan x) = -\infty.$$

4. Vi skriver $u = \overline{AB}, v = \overline{AC}, w = \overline{AD}$. Eftersom F är mittpunkten på CD följer att $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD}$. Detta ger

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AB},$$

eller

$$\overline{EF} = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w.$$

På samma sätt får vi att

$$\overline{GH} = \overline{AH} - \overline{AG} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AC},$$

eller

$$\overline{GH} = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w.$$

För att beräkna vinkeln mellan $\overline{EF}$ och $\overline{GH}$ väljer vi för enkelhets skull tetraederns kantlängd som längdenhet. Då blir

$$u \cdot u = v \cdot v = w \cdot w = 1.$$

Om vi också observerar att vinklarna mellan basvektorerna i samtliga fall är $\pi/3$, så följer också att

$$u \cdot v = v \cdot w = w \cdot u = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Med hjälp av detta kan vi nu beräkna skalärprodukten mellan $\overline{EF}$ och $\overline{GH}$:

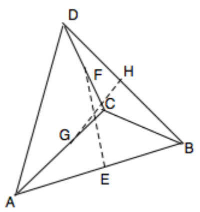
$$\overline{EF} \cdot \overline{GH} =$$

$$\left(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) \cdot \left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) =$$

$$\frac{1}{4}(-u \cdot u - v \cdot v + w \cdot w + 2u \cdot v) =$$

$$\frac{1}{4}(-1 - 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = 0.$$

Eftersom skalärprodukten är lika med noll så följer att vektorerna är ortogonala och att vinkeln därför är $\pi/2$ (90^o).



5. Volymen vid rotation runt x-axeln fås direkt ur formeln för rotationsvolym:

$$V_x = \pi \int_0^2 (f(x))^2 \, dx =$$

$$\pi \int_0^2 x^6 \, dx = \pi \left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^2 = \frac{128\pi}{7}.$$

För att räkna ut volymen vid rotation runt y-axeln kan vi använda cylinderskalsmetoden eller den vanliga formeln där vi byter plats på x och y. Den senare metoden ger, om vi observerar att $y = x^3 \Leftrightarrow x = y^{1/3}$,

$$V_y = \pi \int_0^8 2^2 \, dy - \pi \int_0^8 (y^{1/3})^2 \, dy =$$

$$32\pi - \pi \left[\frac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = 32\pi - \frac{96}{5}\pi = \frac{64}{5}\pi.$$

6.a) Differentialkvationen $y' - e^x y = e^x$ är linjär med integrerande faktor I.F. $= e^{-e^x}$, vilket ger

$$y' - e^x y = e^x \Leftrightarrow e^{-e^x} y' - e^{-e^x} e^x y = e^{-e^x} e^x$$

$$\Leftrightarrow D\left(e^{-e^x} y\right) = e^{-e^x} e^x \Leftrightarrow$$

$$e^{-e^x} y = C - e^{-e^x} \Leftrightarrow y = Ce^{e^x} - 1.$$

Bivillkoret $y(0) = 0$ ger nu att

$$0 = y(0) = Ce - 1 \Leftrightarrow C = e^{-1},$$

dvs

$$y(x) = e^{e^x - 1} - 1.$$

b) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 4r + 3 = 0$, med rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = -3$, vilket ger den homogena lösningen

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning till ekvationen $y'' + 4y' + 3y = (x^2 + x)e^x$ genom att göra variabelbytet $y = ze^x$. Derivation ger $y' = (z' + z)e^x$ och $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Insatt i ekvationen får vi

$$(z'' + 2z' + z)e^x + 4(z' + z)e^x + 3ze^x = (x^2 + x)e^x$$

$$\Leftrightarrow (z'' + 2z' + z) + 4(z' + z) + 3z = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow z'' + 6z' + 8z = x^2 + x.$$

Denna ekvation kan lösas genom ansatsen $z = ax^2 + bx + c$. Derivation ger $z' = 2ax + b$ och $z'' = 2a$. Insatt i ekvationen får vi

$$2a + 6(2ax + b) + 8(ax^2 + bx + c) = x^2 + x.$$

Genom att jämföra koefficienter får vi ekvationerna $8a = 1, 12a + 8b = 1, 2a + 6b + 8c = 0$, vilket ger $a = 1/8, b = -1/16, c = 1/64$ och därmed partikulärlösningen $z = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}$.

Återgång till den ursprungliga variabeln y ger alltså partikulärlösningen

$$y_p = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\right) e^x$$

och slutligen den allmänna lösningen $y = y_h + y_p =$

$$C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\right) e^x.$$

/Martin Tamm/190117