

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

1. Beräkna följande gränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^{x^2} - 1)}{x \ln(1 + x^3)}.$$

4 p

2. Bestäm för alla reella tal a antalet lösningar till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 5y + 2z = a, \\ x + ay + 2z = 2, \\ x + 2y + az = 2. \end{cases}$$

5 p

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

på intervallet $[-2, 2]$. Undersök speciellt stationära punkter, extremvärden och konvexitetsegenskaper.

6 p

4. Låt $(1, 4, 2)$, $(2, -2, 1)$ och $(-1, 0, 2)$ vara koordinaterna för tre punkter med avseende på en given ON-bas.

a) Beräkna arean av den triangel som har sina hörn i dessa punkter.

2 p

b) Beräkna volymen av den tetraeder som har sina fyra hörn i dessa punkter samt i origo.

2 p

5. Beräkna arean av den rotationskropp som uppstår då kurvan $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, får rotera runt x -axeln.

5 p

6. a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'(1 + x) = 1 + y^2$$

som uppfyller bivillkoret $y(0) = 1$.

3 p

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 2xe^x.$$

3 p

Skrivningsåterlämning torsdagen den 19 december kl 15.00 i caféet i hus 5, därefter i rum 204, hus 6, Kräftriket.