Lösningar till tentamen

Matematik för Naturvetenskaper I, 191218.

1.a) Både täljare och nämnare blir noll då $x = 2$, vilket enligt faktorsatsen ger att båda är delbara med $x - 2$. En enkel polynomdivision ger att $x^5 - 32 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ och $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Vi får därför att

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16}{x+2} = 20.$$

b) Eftersom $\ln(1 + t) \approx t$ så följer det att nämnaren $x \ln(1 + x^3)$ är av storleksordningen x^4. Det bör därför räcka att använda utvecklingarna $\ln(1 + t) = t + B_1(t)t^2$ (med $t = x^3$) och $e^t = 1 + t + B_2(t)t^2$ (med $t = x^2$), där B_1 och B_2 är begränsade i någon omgivning till origo. Vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(e^{x^2} - 1)}{x \ln(1 + x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2((1 + x^2 + B_2(x^2)x^4) - 1)}{x((1 + x^3 + B_1(x^3)x^6) - 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + B_2(x^2)x^6}{x^4 + B_1(x^3)x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + B_2(x^2)x^2}{1 + B_1(x^3)x^3}$$

$$= \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

2. Vi beräknar först ekvationssystemets determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 7a + 10.$$

Ekvationen $a^2 - 7a + 10 = 0$ har rötterna $a = 2$ och $a = 5$. För alla andra värden på a kommer systemet enligt teorin att ha en entydig lösning.
Vi undersöker de två specialfallen separat:
$a = 2$. Vi kan skriva systemet på utvidgad matrisform på följande sätt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det framgår av trappformen att systemet har oändligt många lösningar.
$a = 5$. Vi kan skriva systemet på utvidgad matrisform på följande sätt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

De två första raderna är uppenbarligen motstridiga, varför systemet saknar lösning i detta fall.

3. Vi börjar med att konstatera att funktionen är udda. Vi beräknar nu derivatan:

$$f'(x) = D\left(x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) =$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}(3x^2 - x^4).$$

Nollställen till f' är alltså lösningar till ekvationen $3x^2 - x^4 = 0$, dvs $x = \pm\sqrt{3}$ och $x = 0$, som alla ligger i intervallet. Vi får följande teckentabell:

x	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2
f'		$-$		$+$		$+$		$-$	
f	$-\frac{8}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{e^{\frac{3}{2}}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{e^{\frac{3}{2}}}$	$\searrow$	$\frac{8}{e^2}$

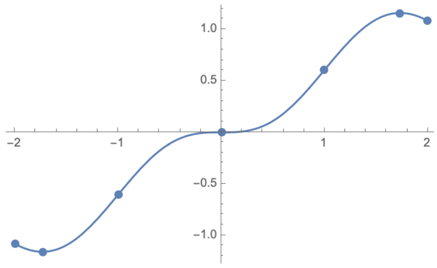
Vi noterar att $x = -\sqrt{3}$ ger ett (globalt) minimum med min-värde $-3\sqrt{3}e^{-3/2}$ och att $x = \sqrt{3}$ ger ett (globalt) maximum med max-värde $3\sqrt{3}e^{-3/2}$. Men även att $x = -2$ ger ett (lokalt) maximum men maxvärde $-8e^{-2}$ och att $x = 2$ ger ett (lokalt) minimum men minvärde $8e^{-2}$.
$x = 0$ är en stationär punkt men inte någon extrempunkt.
Vi beräknar andraderivatan:

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^5 - 7x^3 + 6).$$

Nollställen till f'' är alltså lösningar till ekvationen $x^5 - 7x^3 + 6 = 0$, dvs $x = 0, \pm 1$ och $x = \pm\sqrt{6}$, men endast $-1, 0, 1$ ligger i intervallet. Vi får följande teckentabell:

x	-2		-1		0		1		2
f''		$+$		$-$		$+$		$-$	
f	$-\frac{8}{e^2}$	$\smile$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frown$	0	$\smile$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frown$	$\frac{8}{e^2}$

Vi konstaterar att f är konvex på intervallen $[-2, -1]$ och $[0, 1]$, samt konkav på intervallen $[-1, 0]$ och $[1, 2]$.



4.a) Triangeln spänns upp av vektorerna

$$\overline{u}_1 = (2,-2,1)-(1,4,2) = (1,-6,-1),$$

$$\overline{u}_2 = (-1,0,2)-(1,4,2) = (-2,-4,0).$$

Arean beräknas nu som $A = \frac{1}{2}|\overline{u}_1 \times \overline{u}_1|$.

$$\overline{u}_1 \times \overline{u}_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -6 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (4,2,-16).$$

Vi får $A = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2+(-16)^2} = \sqrt{69}$.

b) Volymen beräknas som

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)\right|,$$

$\overline{v}_1 = (1,4,2), \overline{v}_2 = (2,-2,1), \overline{v}_3 = (-1,0,2)$.

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -28,$$

dvs $V = \frac{1}{6} \cdot |-28| = \frac{14}{3}$.

5. Arean vid rotation runt x-axeln fås direkt ur formeln för rotationsarea:

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx =$$

$$2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx =$$

$$2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

Denna integral kan t ex beräknas med substitutionen $[t = 1+9x^4, dt = 36x^3dx]$. Vi ser att $x^3dx = dt/36$, vilket ger

$$A = \frac{\pi}{18}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^{10} =$$

$$\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

6.a) Differentialkvationen $y'(1+x) = 1 + y^2$ är separabel, vilket ger

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \arctan y = \ln(1+x) + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger nu att

$$\arctan 1 = \ln(1+0)+C \Leftrightarrow C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Genom att ta tangens av båda led får vi att

$$y = \tan\left(\ln(1+x) + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 4r + 4 = 0$, med dubbelroten $r = 2$, vilket ger den homogena lösningen

$$y_h = (Cx+D)e^{2x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning till ekvationen $y''-4y'+4y = 2xe^x$ genom att göra variabelbytet $y = ze^x$. Derivation ger $y' = (z'+z)e^x$ och $y'' = (z''+2z'+z)e^x$. Insatt i ekvationen får vi

$$(z''+2z'+z)e^x - 4(z'+z)e^x + 4ze^x = 2xe^x$$

$$\Leftrightarrow (z''+2z'+z) - 4(z'+z) + 4z = 2x$$

$$\Leftrightarrow z'' - 2z' + z = 2x.$$

Denna ekvation kan lösas genom ansatsen $z = ax + b$. Derivation ger $z' = a$ och $z'' = 0$. Insatt i ekvationen får vi

$$0 - 2(a) + (ax+b) = 2x.$$

Genom att jämföra koefficienter får vi ekvationerna $a = 2, -2a+b = 0$, vilket ger $a = 2, b = 4$ och därmed partikulärlösningen $z = 2x+4$.

Återgång till den ursprungliga variabeln y ger alltså partikulärlösningen

$$y_p = (2x+4)\,e^x$$

och slutligen den allmänna lösningen $y = y_h + y_p =$

$$(Cx+D)e^{2x} + (2x+4)\,e^x.$$

/Martin Tamm/191218