Lösningar till tentamen

Matematik för Naturvetenskaper I, 200116.

1.a) Vi förlänger med båda konjugatuttrycken

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}-1} =$$

$$\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$= \frac{(1+x^2-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)(1-x^2-1)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} \to -\frac{\sqrt{1-0}+1}{\sqrt{1+0}+1} = -1.$$

b) Vi vet att $e^t = 1 + t + B_1(t)t^2$, vilket ger (med $t = x^5$) att $e^{x^5} - 1 = x^5 + B_1(x^5)x^{10}$. På liknande sätt ser vi att eftersom $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + B_2(x)x^5$, så följer att $x^2(x - \sin x) = \frac{1}{6}x^5 - B_2(x)x^7$. Vi ser därför att

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-\sin x)}{e^{x^5}-1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^5 - B_2(x)x^7}{x^5 + B_1(x^5)x^{10}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} - B_2(x)x^2}{1 + B_1(x^5)x^5} = \frac{\frac{1}{6}+0}{1+0} = \frac{1}{6}.$$

2. Det går utmärkt att lösa problemet genom att beräkna systemets determinant, men det är enklare att observera att systemet kan delas upp i två separata system:

$$\begin{cases} ax & +y = 1 \\ x & +ay = 1 \end{cases} \text{ och } \begin{cases} az & +2w = 1 \\ 2z & +aw = 2 \end{cases}.$$

Det första systemet har determinanten $a^2 - 1$ med nollställena $a = \pm 1$ och det andra har determinanten $a^2 - 4$ med nollställena $a = \pm 2$. Vi ser att om $a \neq \pm 1, \pm 2$ så har båda systemen, och därför även det ursprungliga, en entydig lösning. Vi tittar nu på undantagsfallen.

$a = 1$. Det första systemet blir

$$\begin{cases} x & +y = 1 \\ x & +y = 1 \end{cases}$$

som har oändligt många lösningar, medan z, w är entydigt bestämda eftersom determinanten är skild från noll. Sammantaget finns det alltså oändligt många lösningar.

$a = -1$. Det första systemet blir

$$\begin{cases} -x & +y = 1 \\ x & -y = 1 \end{cases}$$

som saknar lösning. Sammantaget finns det alltså inga lösningar.

$a = 2$. Det första systemet är entydigt lösbart, medan det andra blir

$$\begin{cases} 2x & +2y = 1 \\ 2x & +2y = 2 \end{cases}$$

som saknar lösning. Sammantaget finns det alltså inga lösningar.

$a = -2$. Det första systemet är entydigt lösbart, medan det andra blir

$$\begin{cases} -2x & +2y = 1 \\ 2x & -2y = 2 \end{cases}$$

som saknar lösning. Sammantaget finns det alltså inga lösningar.

Sammanfattningsvis ser vi att det finns oändligt många lösningar då $a = 1$, inga lösningar då $a = -1, 2, -2$ och en entydig lösning för övriga värden på a.

3. Om $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$ så blir $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x$. Ekvationen $f'(x) = 0$ har uppenbarligen lösningen $x = 0$, och efter att ha brutit ut faktorn $4x$ för vi andragradsekvationen $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$ med lösningarna $-\frac{1}{2}$ och 2 för de övriga rötterna. Vi får följande teckentabell:

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		2		3
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\frac{117}{16}$	$\searrow$	$-\frac{3}{16}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	9

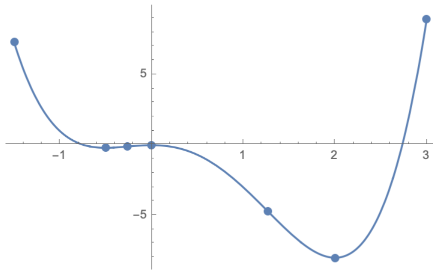
Det framgår nu att $(0,0)$ är en lokal maxpunkt medan $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{16})$ är en lokal minpunkt och $(2, -8)$ är en global minpunkt. Dessutom är $(-\frac{3}{2}, \frac{117}{16})$ en lokal max-punkt och $(3, 9)$ en global maxpunkt.
Vi beräknar andraderivatan:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 4.$$

Nollställen till f'' är alltså lösningar till ekvationen $x^2 - x - \frac{1}{3} = 0$, dvs $\frac{1}{6}\left(3 - \sqrt{21}\right) \approx -0,3$ och $\frac{1}{6}\left(3 + \sqrt{21}\right) \approx 1,3$ som båda ligger i intervallet. Vi får följande teckentabell:

x	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3-\sqrt{21}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{21}}{6}$		3
f''		$+$		$-$		$+$	
f	$\frac{117}{16}$	$\smile$	$\frac{9\sqrt{21}-43}{18}$	$\frown$	$\frac{-9\sqrt{21}-43}{18}$	$\frown$	9

Vi konstaterar att f är konvex på intervallen $[-\frac{3}{2}, \frac{3-\sqrt{21}}{6}]$ och $[\frac{3+\sqrt{21}}{6}, 3]$, samt konkav på intervallet $[\frac{3-\sqrt{21}}{6}, \frac{3+\sqrt{21}}{6}]$.



4.a) Vi vet att $\overline{AD} = -\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{3}{4}\overline{AC}$ och dessutom ser vi att $\overline{BC} = -\overline{AB} + \overline{AC}$. Detta kan uttryckas som att

$$\begin{cases} f_1 = & -\frac{2}{3}e_1 & +\frac{3}{4}e_2, \\ f_2 = & -e_1 & +e_2. \end{cases}$$

Ur detta system kan vi lösa ut e_1, e_2, vilket ger

$$\begin{cases} e_1 = & 12f_1 & -9f_2, \\ e_2 = & 12f_1 & -8f_2. \end{cases}$$

Den vektor som i basen e_1, e_2 har koordinaterna $(3, 2)$ kan skrivas $3e_1 + 2e_2 =$

$$3(12f_1 - 9f_2) + 2(12f_1 - 8f_2) = 60f_1 - 43f_2.$$

De sökta koordinaterna är alltså $(60, -43)$.

5. Funktionen är partiellt deriverbar överallt, så möjliga punkter där max och min kan antas är I. stationära punkter längs kanterna inklusive hörnen och II. stationär punkter i det inre.

I. Längs kanterna antar funktionen samma värden som funktionerna $h_1(t) = f(t, 0) = \sin t$, $h_2(t) = f(\pi, t) = \sin t$, $h_3(t) = f(t, \pi) = \sin t$, $h_4(t) = f(0, t) = \sin t$, där $0 \leq t \leq \pi$. För alla fyra funktionerna gäller att min $= 0$ och max $= 1$, så 0 och 1 är möjliga extremvärden.

II. För att hitta stationära punkter i det inre beräknar vi $f'_x = \cos x$ och $f'_y = \cos y$. Den enda punkt i mängden där båda dessa derivator är noll är $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ med funktionsvärdet $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2$.

Möjliga extremvärden är alltså $0, 1, 2$, av vilket följer att globalt min är 0 och globalt max är 2.

6.a) Differentialkvationen $y'(1+x^2) = 1 + y$ är linjär och kan skrivas som

$$y' - \frac{1}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}.$$

En primitiv till $-\dfrac{1}{1+x^2}$ är $-\arctan x$, så vi får den integrerande faktorn $e^{-\arctan x}$. Efter multiplikation med denna kan ekvationen skrivas

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\arctan x}y\right) = \frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\arctan x}y = -e^{-\arctan x} + C.$$

$$\Leftrightarrow y = -1 + Ce^{\arctan x}.$$

Bivillkoret $y(0) = 0$ ger nu att $C = 1$, vilket alltså ger lösningen

$$y = e^{\arctan x} - 1.$$

b) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 2r + 1 = 0$, med dubbelroten $r = 1$, vilket ger den homogena lösningen

$$y_h = (Cx + D)e^x.$$

Vi noterar att detta är ett resonansfall, eftersom samma exponentialfunktion uppträder både i högerledet och i den homogena lösningen. Vi kan då transformera hela ekvationen $y'' - 2y' + y = e^x$ genom att göra variabelbytet $y = ze^x$. Derivation ger $y' = (z' + z)e^x$ och $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Insatt i ekvationen får vi

$$(z'' + 2z' + z)e^x - 2(z' + z)e^x + ze^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow (z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z = 1$$

$$\Leftrightarrow z'' = 1.$$

Denna ekvation kan lösas genom att integrera två gånger. Vi får

$$z'' = 1 \Leftrightarrow z' = x + C \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}x^2 + Cx + D.$$

Återgång till den ursprungliga variabeln y ger alltså den allmänna lösningen

$$y = (Cx + D)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

/Martin Tamm/200116