STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
19 augusti 2019

Lösningar

19 augusti 2019

Uppgift 1

Rätt svar är

a) $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$

b) $c = 1/6$

c) För-första-gången

d) $a = 1/2$ och $b = -1$

e) $\sigma^2/(1-\mu)^4$

Uppgift 2

Låt F beteckna händelsen att planet är försenat och låt B_i beteckna händelsen att planet tillhör bolag i ($i = 1, 2, 3$).

a) Lagen om total sannolikhet ger:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(F) &= \mathrm{P}(F|B_1)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(F|B_2)\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(F|B_3)\mathrm{P}(B_3) \\ &= 0.08 \cdot 0.6 + 0.06 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.1 = 0.071. \end{aligned}$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(B_1|F) = \frac{\mathrm{P}(F|B_1)\mathrm{P}(B_1)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{0.08 \cdot 0.6}{0.071} = 0.68.$$

Uppgift 3

a) Sannolikhetsfunktionen för X ges av $p_X(0) = 0.05 + 0.14 + 0.16 = 0.35$ och $p_X(1) = 0.54 + 0.07 + 0.04 = 0.65$. Sannolikhetsfunktionen för Y ges av $p_Y(0) = 0.05 + 0.54 = 0.59$, $p_Y(1) = 0.14 + 0.07 = 0.21$ och $p_Y(2) = 0.16 + 0.04 = 0.20$.

b) Vi har $\mathbb{E}[X] = 0.65$, $\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.20 = 0.61$ och $\mathbb{E}[XY] = 1 \cdot 0.07 + 2 \cdot 0.04 = 0.15$. Kovariansen mellan X och Y ges alltså av $C(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0.15 - 0.65 \cdot 0.61 = -0.2465$. Vidare har vi att $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X] = 0.65$ och $\mathbb{E}[Y^2] = 1^2 \cdot 0.21 + 2^2 \cdot 0.20 = 1.01$ så att $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 0.23$ och $V(Y) = 0.64$. Korrelationskoefficienten blir

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{-0.2465}{\sqrt{0.23 \cdot 0.64}} = -0.65.$$

Uppgift 4

a) Låt A beteckna händelsen att två vegetarianer väljs. Det finns totalt 37 vegetarianer och vi får alltså

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{37}{2}}{\binom{110}{2}} = \frac{37 \cdot 36}{110 \cdot 109} = 0.11$$

b) Låt B beteckna händelsen att två kvinnor väljs. Den sökta sannolikheten är $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A)$. Händelsen AB innebär att två kvinnliga vegetarianer väljs vilket sker med sannolikhet

$$\mathrm{P}(AB) = \frac{\binom{22}{2}}{\binom{110}{2}} = \frac{22 \cdot 21}{110 \cdot 109}.$$

Vi får att

$$P(B|A) = \frac{22 \cdot 21}{37 \cdot 36} = 0.35.$$

c) Vi har att

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{110}{2}} = \frac{50 \cdot 49}{110 \cdot 109} = 0.20.$$

Eftersom $\mathrm{P}(B) \neq \mathrm{P}(B|A)$ så är A och B inte oberoende.

Uppgift 5

Låt X_i vara en stokastisk variabel som anger Annas väntetid (i minuter) den $i$te dagen. Då är $\{X_i\}$ enligt uppgiften oberoende $U(0, 12)$ så att $Ex[X] = 6$ och $V(X) = 12^2/12 = 12$.

a) Den sammanlagda väntetiden under de 225 dagarna ges av $S_{225} = \sum_{i=1}^{225} X_i$, där $\mathbb{E}[S_{225}] = 225 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 1350$ och $V(S_{225}) \overset{ober}{=} 225 \cdot V(X_i) = 2700$. Eftersom S_{225} är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler så, är den approximativt N(1100,4900)-fördelad enligt Centrala gränsvärdessatsen, dvs

$$\mathrm{P}(S_{225} > 1440) = \mathrm{P}\left(\frac{S_{225} - 1350}{\sqrt{2700}} > \frac{1440 - 1350}{\sqrt{2700}}\right) \overset{CGS}{\approx} 1 - \Phi(1.73) = 0.042.$$

b) Låt $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Då gäller att $\mathbb{E}[S_n] = 6n$ och $V(S_n) \overset{ober}{=} 12n$. Vi har att

$$\mathrm{P}(S_n > 1440) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n - 6n}{\sqrt{12n}} > \frac{1440 - 6n}{\sqrt{12n}}\right) \overset{CGS}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{1440 - 6n}{\sqrt{12n}}\right).$$

Ska denna sannolikhet vara lika med 0.99 fås ekvationen

$$\frac{1440 - 6n}{\sqrt{12n}} = -\lambda_{0.99} = -2.3263.$$

Ansätter vi $k = n^2$ så ger detta en andragradsekvation i k som löses av $k = 16.17$, dvs $n = 262$.

Uppgift 6

a) Vi beräknar först fördelningsfunktionen för Z. Eftersom $\mathrm{P}(Z > e^0 = 1) = 1$ så gäller att $F_Z(z) = 0$ för $z \leq 1$. För $z > 1$ fås:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(e^X \leq z) = \mathrm{P}(X \leq \ln z) \\ &= \int_0^{\ln z} 5e^{-5x} dx = [-e^{-5x}]_{x=0}^{x=\ln z} = 1 - \frac{1}{z^5}, \end{aligned}$$

vilket ger att $f_Z(z) = F'_Z(z) = 5/z^6$ för $z > 1$ och 0 annars.

b) Medianen m är lösningen till ekvationen $F_Z(m) = 1/2$, dvs $1 - 1/m^5 = 1/2$. Vi får $m = 2^{1/5} = 1.15$.