STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
30 oktober 2019

Lösningar

30 oktober 2019

Uppgift 1

Rätt svar är

a) falskt

b) $\mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(C)$

c) 0 oavsett värdet på λ

d) Det gäller alltid att $\mathbb{E}[X+Y] = \mu_x + \mu_y$

e) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Uppgift 2

Låt S_0 och S_1 beteckna händelserna att en nolla respektive etta sänds, och låt M_0 beteckna händelsen att den mottagna signalen klassificeras som en nolla.

a) Lagen om total sannolikhet ger $\mathrm{P}(M_0) = \mathrm{P}(M_0|S_0)\mathrm{P}(S_0) + \mathrm{P}(M_0|S_1)\mathrm{P}(S_1)$. Här är $\mathrm{P}(M_0|S_0) = \Phi(0.2) = 0.5793$ och $\mathrm{P}(M_0|S_1) = \Phi(0.2-1) = 1 - \Phi(0.8) = 0.2119$. Vi får alltså

$$\mathrm{P}(M_0) = 0.5793 \cdot 0.4 + 0.2119 \cdot 0.6 = 0.3589$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathrm{P}(S_0|M_0) = \frac{\mathrm{P}(M_0|S_0)\mathrm{P}(S_0)}{\mathrm{P}(M_0)} = \frac{0.5793 \cdot 0.4}{0.3589} = 0.6457.$$

Uppgift 3

Vi analyserar situationen som slumpmässig dragning utan återläggning med hänsyn tagen till ordning. Det totala antalet möjliga utfall är $5! = 120$.

a) Antalet utfall som medför att kvinnorna hamnar bredvid varandra är $4 \cdot 2! \cdot 3! = 48$. Eftersom alla utfall har samma sannolikhet ges den sökta sannolikheten av $48/120 = 0.4$.

b) Antalet utfall som medför att de båda kvinnorna hamnar framför männen är $2! \cdot 3! = 12$ och den sökta sannolikheten blir $12/120 = 0.1$.

Uppgift 4

Låt Y_i beteckna felet för tal i ($i = 1, \ldots, 120$). Då är $\{Y_i\}$ oberoende Re(0,1), med $\mathbb{E}[Y_i] = 0.5$ och $\mathrm{Var}(Y_i) = 1/12$. Det totala felet ges av $X = \sum_{i=1}^{120} Y_i$. Eftesom X är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler så säger Centala gränsvärdessatsen att dess fördelning approximeras väl av en normalfördelning. Vi får:

$$\mathrm{P}(X > 50) = \mathrm{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}} > \frac{50 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{50 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}}\right),$$

där $\Phi(x)$ betecknar fördelningsfunktionen för $N(0,1)$-fördelningen. Här är $\mathbb{E}[X] = 120 \cdot \mathbb{E}[Y_i] = 60$ och eftersom $\{Y_i\}$ är oberoende så fås att $\mathrm{Var}(X) = 120 \cdot \mathrm{Var(Y_i)} = 10$. Vi får alltså att

$$\mathrm{P}(X > 50) \approx 1 - \Phi\left(-\sqrt{10}\right) = \Phi(\sqrt{10}) = \Phi(3.16) = 0.999.$$

Uppgift 5

a) Vi har att livslängden X för en given komponent är $\mathrm{N}(160, \sigma^2)$, och får alltså:

$$\mathrm{P}\left(120 < X < 200\right) = \mathrm{P}\left(-\frac{40}{\sigma} < \frac{X - 120}{\sigma} < \frac{40}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1.$$

Vidare har vi att $2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.8$ är ekvivalent med att $\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9$. Vi får likhet då $40/\sigma = \lambda_{0.1} = 1.2816$, dvs då $\sigma = 31.21$.

b) Låt N beteckna antalet komponenter som man behöver undersöka innan man hittar en som fortfarande fungerar. Då är Y ffg-fördelad med

$$p = \mathrm{P}(X \geq 190) = \mathrm{P}\left(\frac{X-160}{31.21} \geq 0.96\right) = 1 - \Phi(0.96) = 0.1685,$$

och vi får att

$$\mathrm{P}(Y > 2) = 1 - \mathrm{P}(Y = 1) - \mathrm{P}(Y = 2) = 1 - 0.1685 - (1 - 0.1685) \cdot 0.1685 = 0.69.$$

Uppgift 6

Vi söker fördelningen för $Z = |X - Y|$, och får för $z \in (0, a)$ att

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}(X - Y \leq z) + \mathrm{P}(X - Y \leq -z) \overset{symmetri}{=} 1 - 2\mathrm{P}(X > Y + z),$$

där

$$\mathrm{P}(X > Y + z) = \int_0^{a-z} \int_{y+z}^{a} \frac{1}{a^2} dx dy = \ldots = \frac{1}{2a^2}(a - z)^2.$$

Alltså har vi att $F_Z(z) = \frac{2z}{a} - \frac{z^2}{a^2}$ och $f_Z(z) = \frac{2}{a} - \frac{2z}{a^2}$ för $z \in (0, a)$ (och $f_Z(z) = 0$ för övriga z).