STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
27 november 2019

Tentamen i Sannolikhetsteori I

27 november 2019 kl. 9–14

Examinator: Maria Deijfen, tel. 16 45 91, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och tabeller. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentan hämtas på studentexpeditionen.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Det gäller alltid att $\mathrm{P}(E^c) = 1 - \mathrm{P}(E)$. Vilket av sannolikhetsaxiomen behöver man inte utnyttja för att visa det?

1. $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$ om $A_1, A_2, \ldots$ är parvis disjunkta
2. $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ för alla $A \subset S$
3. $\mathrm{P}(S) = 1$

b) Ett mynt kastas två gånger. Definiera händelserna:
$A = \{\text{Det blir krona i första kastet}\}$
$B = \{\text{Det blir krona i andra kastet}\}$
$C = \{\text{Det blir samma utfall i båda kasten}\}$
Vad gäller?

1. De tre händelserna är fullständigt oberoende.
2. De tre händelserna är inte parvis oberoende.
3. De tre händelserna är parvis oberoende men det gäller inte att $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

c) Låt X vara en heltalsvärd stokastisk variabel med fördelningsfunktion $F(x)$. Vad gäller alltid?

1. $\mathrm{P}(X = x) = \sum_{y \leq x} F(y)$
2. $\mathrm{P}(X = x) = \sum_{y > x} F(y)$
3. $\mathrm{P}(X = x) = F(x) - F(x - 1)$
4. $\mathrm{P}(X = x) = F(x + 1) - F(x)$

d) Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel. Påstående: Om A och B är två områden i (x, y)-planet med samma area, så gäller alltid att $\mathrm{P}((X, Y) \in A) = \mathrm{P}((X, Y) \in B)$. Påståendet är:

1. falskt
2. sant

e) Om $X \sim \text{ffg}(p_1)$ och $Y \sim \text{ffg}(p_2)$ är oberoende, så är $X + Y$:

1. $\text{ffg}(\min\{p_1, p_2\})$
2. $\text{ffg}(p_1 + p_2)$
3. NegBin(2,p) om $p_1 = p_2 = p$
4. NegBin(2,$p_1 + p_2$)
5. Inget av ovanstående alternativ är korrekt.

Uppgift 2

En politiker håller att tal inför en publik som består av anhängare (60%), motståndare (20%) och neutrala (20%). Sannolikheten att en slumpvis uttagen person bland anhängarna ska berömma talet är 95%. Motsvarande sannolikhet för motståndarna är 0% och för de neutrala 40%. Efter talet tillfrågas en slumpmässigt vald person ur publiken om sin åsikt.

a) Vad är sannolikheten att personen berömmer talet?

b) Vad är sannolikheten att personen är motstådare om hen *inte* berömmer talet?

Uppgift 3

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x \leq y < 1; \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna.

b) Bestäm kovariansen mellan X och Y.

Uppgift 4

Det finns 10 par skor i ett skåp. Om 8 skor tas på måfå ur skåpet, vad är sannolikheten att man får:

a) inget par som hör ihop?

b) exakt ett par som hör ihop?

Uppgift 5

Ett tryckeri ska trycka en bok. Varje bibliotek beställer 20, 30 eller 40 exemplar av boken med lika stor sannolikhet. Hundra bibliotek beställer boken oberoende av varandra.

a) Bestäm väntevärde och varians för antalet böcker som ett givet bibliotek beställer.

b) Hur många böcker måste tryckas om det med 95% sannolikhet ska räcka till alla hundra biblioteken?

Uppgift 6

Låt X vara en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde 3, och definiera $Y = e^{-X}$.

a) Bestäm täthetsfunktionen för Y.

b) Beräkna väntevärde och varians för Y exakt.

c) Beräkna väntevärde och varians för Y med hjälp av felfortplantningsformlerna.

Lycka till!