STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
18 augusti 2020

Tentamen i Sannolikhetsteori I

18 augusti 2020 kl. 9–16

Examinator: Maria Deijfen, tel. 070-3369790, mia@math.su.se.
Tillåtna hjälpmedel: Kursboken, föreläsningsanteckningar samt annan litteratur, beräkningsprogram, etc. Att samarbeta eller ta hjälp av någon annan person är inte tillåtet.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast fredag 28 augusti.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras. Följande gränser gäller för betygen A-E:

A	B	C	D	E
50	45	40	35	30

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla ditt namn samt följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) En symmetrisk tärning kastas. Låt A vara händelsen att det blir ett udda utfall och B händelsen att det blir en etta, tvåa eller trea. Vad gäller?

1. $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$
2. $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A)$
3. $\mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}(A)$

b) Betrakta följande funktion, där c är en konstant:

$$p(k) = \begin{cases} ck & \text{om } k = 1, 2, 3, 4, 5; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Hur måste c väljas för att $p(k)$ ska vara en sannolikhetsfunktion?

1. $c = 1/5$
2. $c = 1/15$
3. $c = 15$
4. $c = 5$

c) I en skolklass med totalt 25 elever finns 10 flickor. Man ska välja ut 5 elever för att besvara en enkät om IT-utrustning i hemmet. Urvalet görs genom att man lägger en namnlapp för varje elev i en urna och därefter drar 5 lappar ur urnan, utan återläggning. Låt X vara antalet flickor i urvalet. Vad gäller?

1. X är binomialfördelad med väntevärde 3
2. X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 3
3. X är binomialfördelad med väntevärde 2
4. X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 2

d) Antag att $X \sim N(0, 1)$. Vilken fördelning har $Y = 3X + 2$?

1. Y är normalfördelad med väntevärde 3 och varians 2.
2. Y är normalfördelad med väntevärde 2 och varians 3.
3. Y är normalfördelad med väntevärde 2 och varians 9.
4. Y är inte normalfördelad.

e) Låt X vara en slumpvariabel med väntevärde $\mu \neq 0$ och varians σ^2. Då gäller enligt felfortplantningsformlerna:

1. $V\left(\sqrt{X}\right) \approx \frac{\sigma^4}{4\mu}$
2. $V\left(\sqrt{X}\right) \approx \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\mu}}$
3. $V\left(\sqrt{X}\right) \approx \frac{\sigma^2}{4\mu}$
4. $V\left(\sqrt{X}\right) \approx \frac{\sigma^4}{2\sqrt{\mu}}$

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $\mathrm{P}(A) = 0.11$, $\mathrm{P}(B) = 0.17$ och $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.26$.

a) Beräkna sannolikheten att ingen av händelserna A och B inträffar.

b) Beräkna sannolikheten att både A och B inträffar.

c) Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna A och B inträffar.

Uppgift 3

I en viss region är 20% av befolkningen rökare. Sannolikheten att få lungcancer för en slumpmässigt vald person är 0.006, men sannolikheten att en rökare får lungcancer är 10 gånger så hög som att en icke-rökare får lungcancer.

a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald person i regionen får lungcancer givet att personen i fråga är rökare? *Ledning: Använd lagen om total sannolikhet.*

b) Givet att en slumpmässigt vald person får lungcancer, vad är sannolikheten att personen är rökare?

Uppgift 4

Låt C vara en cirkel i planet med radie 5 och centrum i origo. En punkt (X, Y) väljs likformigt i C.

a) Ange den simultana täthetsfunktionen för (X, Y).

b) Beräkna $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

c) Är X och Y oberoende?

Uppgift 5

Antalet limpor som en kund i ett kvartersbageri köper kan beskrivas av en stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion

$$p(k) = \begin{cases} 0.4 & \text{om } k = 0; \\ 0.3 & \text{om } k = 1; \\ 0.3 & \text{om } k = 2; \\ 0 & \text{om } k \geq 3. \end{cases}$$

Olika kunders inköp kan antas vara oberoende.

a) Beräkna väntevärde och varians för antalet limpor som en kund köper.

b) Bageriet har bakat 95 limpor en given dag och har 100 kunder denna dag. Beräkna sannolikheten att lagret räcker.

c) Om bageriet har 100 kunder, hur många limpor måste bakas för att sannolikheten att lagret räcker ska vara minst 95%?

Uppgift 6

Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler likformigt fördelade på intervallet $[0, 1]$.

a) Bestäm täthetsfunktionen för $Z = X + Y$.

b) Ange fördelningsfunktionen för Z.

Lycka till!