STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
7,5 hp
2019-08-27, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E.

---

1. **(8 p.)** Beräkna integralerna

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \left(bx^3 + cx^{-1}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{och} \qquad \int_1^{2019} (2x\ln x + x)e^{x^2\ln x}\,\mathrm{d}x,$$

där a, b och c är reella konstanter och $a > 0$.

Lösning:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-ax}}{-a}\Big|_{x=0}^{B} = \lim_{B\to\infty}\left(\frac{e^{-aB}}{-a} - \frac{1}{-a}\right) = \frac{1}{a},$$

$$\int_1^2 \left(bx^3 + cx^{-1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{b}{4}x^4 + c\ln|x|\right)\Big|_{x=1}^{2} = 4b + c\ln 2 - \frac{b}{4} - 0 = \frac{15}{4}b + c\ln 2,$$

För den tredje integralen använder vi oss av substitutionen $t = x^2\ln x$, som ger $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + \frac{x^2}{x} = 2x\ln x + x$. Detta leder till

$$\int_1^{2019}(2x\ln x + x)e^{x^2\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2019^2\ln 2019} e^t\mathrm{d}t = e^t\Big|_{t=0}^{2019^2\ln 2019} = e^{2019^2\ln 2019} - 1.$$

2. **(5 p.)** Bestäm alla x för vilka den geometriska serien $3 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^3} + \cdots$ konvergerar. För vilket x är seriens värde lika med 5?

Lösning: Vi kan skriva om serien till

$$3 + 3\frac{2}{x} + 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \cdots,$$

vilken är den geometriska serien med $a = 3$ och $k = \frac{2}{x}$. Denna konvergerar precis när $|\frac{2}{x}| < 1$, vilket är ekvivalent med

$$x < -2 \qquad \text{eller} \qquad x > 2.$$

För sådana x blir gränsvärdet av serien

$$3\frac{1}{1 - 2/x} = \frac{3x}{x-2}.$$

Detta liknar 5 när $3x = 5(x-2)$, vilket är ekvivalent med $x = 5$.

3. **(7 p.)** Låt $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$.

   (a) Bestäm definitionsmängden för f.

   (b) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.

   (c) Undersök var f är växande resp. avtagande.

   Lösning: (a) $f(x)$ är definierad för alla reella x utom nämnarens nollställen, vilket är lösningarna till $x^2 = 2$, alltså $x = \pm\sqrt{2}$. Detta ger $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

   (b) Derivatorna till f blir

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2) - (x^2+1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-6x}{(x^2-2)^2}$$

   och

$$f''(x) = \frac{-6(x^2-2)^2 - (-6x) \cdot 2 \cdot (x^2-2) \cdot 2x}{(x^2-2)^4} = \frac{6(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$$

   Kritiska punkter är alla nollställen till f' men det blir bara lösningarna till $-6x = 0$, d.v.s. bara $x = 0$. Sätter man in det i andraderivatan så får man $f''(0) < 0$. Därför har f ett lokalt maximum i $x = 0$ och ingen annan lokal extrempunkt.

   (c) Funktionen f har en enda kritisk punkt ($x = 0$) och två lodrätta asymptoter i $x = \pm\sqrt{2}$ och kan därför byta monotoni bara i dessa tre punkter. Genom att sätta in specifika värden ser man att

$$\begin{aligned}
f'(x) &> 0, && -\infty < x < -\sqrt{2}, \\
f'(x) &> 0, && -\sqrt{2} < x < 0, \\
f'(x) &< 0, && 0 < x < \sqrt{2}, \\
f'(x) &< 0, && \sqrt{2} < x < \infty.
\end{aligned}$$

   Därför är f växande på $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, 0)$ och avtagande på $(0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

4. **(5 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ kring $x_0 = 1$.

   Lösning: Vi beräknar derivatorna:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2}{x+1}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}.$$

   Värdena på $x_0 = 1$ blir då

$$f(1) = \ln 4, \qquad f'(1) = 1, \qquad f''(1) = -\frac{1}{2}, \qquad f'''(1) = \frac{1}{2}.$$

   Detta ger Taylorapproximationen

$$f(x) \approx \ln 4 + (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3.$$

5. **(7 p.)** Finn alla lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Lösning: Vi skriver systemet i matrisform och genomför Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det finns inga pivotelement i den andra och fjärde kolonnen. Därför får vi välja $s = x_2$ och $t = x_4$ godtyckliga. (Särskilt finns oändligt många lösningar.) Den andra raden ger $x_3 = 1 - x_4 = 1 - t$, och den första kan skrivas som $x_1 = 1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 + s + (t-1) + t = s + 2t$. Den generella lösningen till systemet är alltså

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 0) + s(1, 1, 0, 0) + t(2, 0, -1, 1),$$

där $s, t \in \mathbb{R}$ är godtyckliga.

6. **(8 p.)** Skissa triangeln med hörnen $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ i planet och bestäm minimum och maximum av funktionen $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ på denna triangel.

Lösning: Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2} 2x \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2+y^2} 2y.$$

Ekvationen $e^{x^2+y^2} 2x = 0$ ger $x = 0$ och då blir den andra ekvationen $e^{y^2} 2y = 0$, vilket ger $y = 0$. Således är $(0, 0)$ den enda kritiska punkten, men den ligger inte i triangeln. Därför måste båda minimum och maximum ligga på randen.

Randen består av tre delar. Den första sidan beskrivs genom $y = 2$ och $0 \leq x \leq 1$. Där har funktionen formen $g(x) = f(x, 2) = e^{x^2+4}$. Denna funktion är växande för $0 \leq x \leq 1$, vilket innebär att den antar sitt minsta och största värde på randpunkterna, d.v.s. för $x = 0$ och $x = 1$ (alltså på hörnen). Detta ger dem två punkterna $(0, 2)$ och $(1, 2)$ som eventuella extrempunkter.

Samma argumentation för sidan med $x = 1$ och $0 \leq y \leq 2$ ger de möjliga extrempunkterna $(1, 0)$ och (igen) $(1, 2)$.

Sidan som inte är parallell till någon axel beskrivs genom $0 \leq x \leq 1$ och $y = 2 - 2x$. Funktionen f har där formen

$$g(x) = e^{x^2+(2-2x)^2} = e^{5x^2-8x+4}.$$

Denna funktion är inte monoton för $0 \leq x \leq 1$. Därför deriverar vi g för att hitta möjliga minimi- och maximipunkter. Vi har

$$g'(x) = (10x - 8)e^{5x^2-8x+4},$$

vilket är noll om $10x - 8 = 0$, d.v.s. om $x = 4/5$. Då är $y = 2 - 8/5 = 2/5$ och vi har en till möjlig extrempunkt.

Vi beräknar nu funktionsvärdena,

$$\begin{aligned} f(1,0) &= e \approx 2,718, \\ f(0,2) &= e^4 \approx 54,598, \\ f(1,2) &= e^5 \approx 148,413, \\ f(4/5,2/5) &= e^{4/5} \approx 2,226. \end{aligned}$$

Största av värdena är e^5 och minsta värdet är $e^{4/5}$. Därför är e^5 maximum och $e^{4/5}$ minimum av f på triangeln.