STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Examinator: Salvador Rodriguez-Lopez
MM3001-7,5 hp

Tentamensskrivning
Matematiska metoder för ekonomer
2019-10-25, 09:00-14:00

Lösningarna ska vara klart och tydligt skrivna med kortfattade förklaringar som gör din tankegång lätt att följa. Otydlig lösning kan ge avdrag trots korrekta beräkningar. Institutionens räknare är tillåtna, men exakta svar förväntas om ej annat är angivet. Formelsamling är ej tillåten utöver det som ges på detta blad. Totalt 20 poäng ger garanterat betyg E. Observera att talen inte är ordnade efter svårighetsgraden.

---

1. **(7 p.)** Låt $f(x) = \frac{(4+x)^2}{x-1}$.
   (a) Bestäm definitionsmängden för f.
   (b) Undersök var f är växande resp. avtagande.
   (c) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.
   (d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x}$.
   (e) Undersök om f har något globalt maximum/minimum.

2. **(7 p.)** Beräkna integralerna

$$\int_1^{2^{2019}} \frac{1}{2019x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{och} \qquad \int x2^{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

3. **(7 p.)** Skriv följande system i matrisform (d.v.s. skriv systemet som $A \cdot v = b$, när A är en 4×3-matris, v är en 3×1-matris och b är en 4×1-matris)

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1,\\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1,\\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1,\\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 2. \end{aligned}$$

   Använd Gausselimination för att bestämma alla lösningar till det linjära ekvationssystemet.

4. **(6 p.)** Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right) - 2e^{-x^2}$$

   kring $x = 0$.

5. **(7 p.)** Skissa området i planet som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $2x + 4y = 40$ och bestäm minimum och maximum av funktionen

$$f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + 20x + 22y - 25$$

   på detta område.

6. **(6 p.)** Bestäm alla reella tal a sådana att den oändliga serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(1-a)^n}$, konvergerar. För vilket värde på a är seriens summa lika med 4?

Var god vänd!

FORMLER

Approximation av f kring $x = x_0$ given av Taylorpolynomet av grad n:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Lösningsförslag läggs upp på kurssidan efter skrivningen.
Tentamensåterlämning: Torsdag 7 november 2019, kl. 11:00 - 11:15, i rum 402 (Kräftriket 6).
Efter återlämningstiden finns skrivningarna att hämta på studentexpeditionen, rum 204 i hus 6.

Lycka till!

Lösningsförslag till tentamen: Matematiska metoder för ekonomer

1. (a) Definitionsmängden av f är $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   (b) Vi har att för alla $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(4+x)(x-6)}{(x-1)^2}.$$

   Då funktionen är växande i $(-\infty, -4) \cup (6, +\infty)$ och avtagande i $(-4, 4) \setminus \{1\}$.

   (c) Funktionen har en lokal maximipunter i $x = -4$ och en local minimipunter i $x = 6$.

   (d)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 8x + 16}{2x(x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x}}{2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2}.$$

   (e) Funktioner saknas global maximum och minimum eftersom

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

2. (a) $\ln 2$;

   (b) $\frac{1}{2}$.

   (c) $\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Systemet skrivs om som

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

   Då har systemet oandliga lösningar som kan beskrivas som:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1-z}{4}, \\ x_2 &= \frac{1+3z}{4}, \\ x_3 &= z, \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \begin{cases} x_1 &= z, \\ x_2 &= 1 - 3z \\ x_3 &= 1 - 4z, \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \begin{cases} x_1 &= \frac{1-z}{3}, \\ x_2 &= z \\ x_3 &= \frac{2z-1}{3}, \end{cases}$$

   för alla $z \in \mathbb{R}$.

4. Vi skiver om funktionen som

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1+x^2) - 2e^{-x^2}.$$

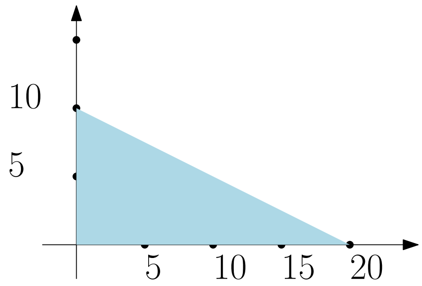
   Derinationsregler ger oss att

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} + 4xe^{-x^2}, \qquad \text{och}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} + (4 - 8x^2)e^{-x^2},$$

   då

$$f(0) = -2, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1 - 2 + 4 = 1.$$

   Sammanfattningsvis är att Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 0$ är $-2 + x + \frac{x^2}{2}$.



5. Området D ser ut som visas i figuren. Randen av området kan beskrivas som tre segmenter:

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= \{(x,y) : \, x \in [0,20], y = 0\}, \\
L_2 &:= \{(x,y) : \, y \in [0,10], x = 0\}, \\
L_3 &:= \{(x,y) : \, y \in [0,10], x = 20-2y\}.
\end{aligned}
$$

Derivering ger oss att

$$
\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= -2x - y + 20, \\
\partial_y f(x,y) &= -x - 2y + 22.
\end{aligned}
$$

Då finns det en endast stationär punkt, som är $(6,8)$, men det ligger inte i området eftersom

$$2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 12 + 32 = 42 > 40.$$

Hörnen av området är $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (20,0)$ och $P_3 = (0,10)$. Då får vi att

$$f(P_0) = -25, \qquad f(P_1) = -25, \qquad f(P_3) = 95.$$

För alla punkter (x,y) i randen L_1 får vi att

$$h_1(x) := f(x,y) = -x^2 + 20x - 25, \qquad x \in [0,20].$$

Vi vill bestämma den maximum och minimum till h_1 i intervalet $[0,20]$. Då vill vi först undersöka om derivatan av denna funktion är noll i någon punkt i $(0,20)$. För att göra det, vi löser

$$0 = h_1'(x) = -2x + 20 \Leftrightarrow x = 10.$$

Funktionens värde i punkten är

$$f(10,0) = h(10) = -100 + 200 - 25 = 75.$$

För alla punkter (x,y) i randen L_2 får vi att

$$h_2(y) := f(x,y) = -y^2 + 22y - 25, \qquad y \in [0,10].$$

Undersökning av stationära punkter i intervallet $(0,10)$ ger att det finns inte, eftersom

$$0 = h_2'(y) = -2y + 22 \Leftrightarrow x = 11 \notin (0,10).$$

För alla punkter (x,y) i randen L_3 får vi att

$$h_3(y) = f(20-2y, y) = \ldots = -25 + 42y - 3y^2, \qquad y \in [0,10].$$

Räkingen av derivatan ger oss att

$$0 = h_3'(y) = 42 - 6y \Leftrightarrow y = 7 \in (0,10), \qquad (\text{då} \quad x = 6).$$

Då funktionensvärde in punkten $P_5 = (6,7)$ är

$$f(6,7) = -25 + 294 - 3 \cdot 49 = -21 + 298 - 147 = 298 - 168 = 122.$$

Sammafattningsvis är att den maximum av funktionen på området antas i punkten $P_5 = (6,7)$, och $f(P_5) = 122$. Dessutom, den minimum av functionen på området är -25 och det antas i hörnerna.

6. Den geometriska serien konvergerar om $|1-a| > 1$. Det är ekvivalent med $a < 0$ eller $a > 2$. Därför för alla reella tal $a \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, seriens summa $S(a)$ är

$$S(a) = 2\frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}} = \frac{2(1-a)}{-a} = \frac{2(a-1)}{a}.$$

Då

$$S(a) = 4 \Leftrightarrow 2a = a - 1 \Leftrightarrow a = -1.$$