STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 5003
TENTAMEN
27 november 2019

Tentamen i Statistisk inferensteori
27 november 2019, kl. 9-14

Examinator: Chun-Biu Li, cbli@math.su.se.
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare tillhandahålles av institutionen, personlig ej tillåten. Formelsamling på tentamens sista sidor.
återlämning: Meddelas i kurshemsidans forum.

Resonemang skall vara tydliga och lätta att följa. Varje korrekt och fullständigt löst uppgift ger 10 poäng. För betyg A-E krävs 20 poäng på Del 1, samt att följande gränser uppnås på Del 2:

A	B	C	D	E
25	19	13	7	0

Del 1

Låt $X = (X_1, \dots, X_n)$ beteckna en vektor av n oberoende $Gamma(3, \theta)$-fördelade stokastiska variabler och $x = (x_1, \dots, x_n)$ en realisering av densamma.

Uppgift 1

a) Bestäm score-funktionen $S(\theta)$ och verifiera att $E_\theta(S(\theta)) = 0$. (3p)

Lösning: Genom att utnyttja antaganden om oberoende och marginalfördelning får vi likelihoodfunktionen

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \propto \prod_{i=1}^{n} \theta^3 x_i^2 \exp(-\theta x_i) = \theta^{3n} \exp(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i) \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Logaritmering och derivering ger scorefunktionen

$$S(\theta) = \frac{d}{d\theta} \log(L(\theta)) = \frac{3n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Eftersom $E(X_i) = 3/\theta$ (formelsamling) fås nu att $E(S(\theta)) = 0$.

b) Använd faktoriseringskriteriet för att visa att ML-skattaren av θ är en tillräcklig (sufficient) stickprovsvariabel (4p)

Lösning: Ett maximum till $L(\theta)$ ges av $S(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 3/\bar{x}$. Enligt faktoriseringskriteriet är $h(x)$ tillräcklig om $L(\theta) = g_1(\theta, h(x)) \times g_2(x)$, vi har

$$L(\theta) = \theta^{3n} \exp(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i) \times \prod_{i=1}^{n} x_i = \theta^{3n} \exp(-\theta 3n/\hat{\theta}) \times \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Det följer att $h(x) = 1/\hat{\theta}$ är tillräcklig.

c) Visa att $g(x, \theta) = \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$ är en pivåvariabel. (3p)

Lösning: Ur transformationssatsen för stokastiska variabler inses att om X har täthetsfunktion $f(x)$ så har θX täthetsfunktion $f(x/\theta)/\theta$. Tillämpning på det aktuella fallet ger att $\theta X_i \sim Gamma(3, 1)$, en fördelning som inte beror på θ. Således beror ej heller fördelningen för $g(X, \theta) = \theta \sum_{i=1}^{n} X_i$ på θ, dvs $g(X, \theta)$ är en pivåvariabel.

Uppgift 2

a) Beskriv hur ML-skattarens väntevärdesfel (bias) kan uppskattas med parametrisk Bootstrap. (5p)

Lösning:

- Simulera N stickprov av storlek n från $Gamma(3, \hat{\theta})$.
- För varje simulerat stickprov, bestäm ML-skattningen.
- Uppskatta bias med $N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \hat{\theta}_i - \hat{\theta}$, där $\hat{\theta}_i$ är ML-skattningen baserat på det i:te stickprovet.

b) Visa att familjen av $Gamma(\alpha, \beta)$-fördelningar utgör en konjungerande familj av apriorifördelningar för θ. (5p)

Lösning: Givet en $Gamma(\alpha, \beta)$ apriorifördelning $p(\theta)$ ges aposteriorifördelningen av

$$\begin{aligned} p(\theta|x) \propto L(\theta) \times p(\theta) &\propto \theta^{3n} \exp(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i) \times \theta^{\alpha-1} \exp(-\beta\theta) \\ &= \theta^{3n+\alpha-1} \exp(-\theta(\beta + \sum_{i=1}^{n} x_i)), \end{aligned}$$

vilket känns igen som en $Gamma(3n + \alpha, \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i)$-fördelning. Således blir aposteriorifördelningen en Gamma-fördelning när apriorifördelningen är en Gamma-fördelning och Gamma-fördelningen är konjungerande för likelihooden.

Uppgift 3

a) För ML-skattaren $\hat{\theta}$ gäller att $\sqrt{n}(\hat{\theta}^2 - \theta^2)$ konvergerar i fördelning mot $N(0, \sigma^2)$. Vad är σ^2? (5p)

Lösning: Enligt ML-skattarens asymptotik följer att $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ konvergerar i fördelning mot $N(0, 1/J_1(\theta))$, där $J_1(\theta)$ är Fisher-informationen i en observation som ges av $J_1(\theta) = Var(S_1(\theta)) = Var(3/\theta - X_1) = 3/\theta^2$. Vidare följer ur Deltametoden att $\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta))$ konvergerar mot $N(0, g'(\theta)^2/J_1(\theta))$. Insättning av $g(\theta) = \theta^2$ ger nu $\sigma^2 = 4\theta^4/3$.

b) Härled att uttryck för likelihood-kvot statistikan $T_L(x)$ för hypotesen $H_0 : \theta = 1$. Kan nollhypotesen förkastas på nivån 0.05 om vi observerar $T_L(x) = 4.3$? Stickprovsstorleken kan antas stor nog för att asymptotiska resulat skall gälla med god noggrannhet. (5p)

Lösning: Likelihood-kvot statistikan ges av $T_L(x) = -2(\log(L(1)) - \log(L(\hat{\theta}))) = -2((3n - \sum_{i=1}^n x_i) - 3n\log(\hat{\theta}))$. Under noll-hypotesen är den $\chi^2(1)$-fördelad, noll-hypotesen kan därför förkastas då $T_L > 3.84$.

Del 2

Uppgift 4

a) Formulera och visa Cramér-Raos olikhet. (5p)

Lösning: Se lärobok.

b) Låt $S(\theta)$ och $J(\theta)$ beteckna score-funktion och förväntad Fisherinformation. Visa att $S(\theta)/\sqrt{J(\theta)}$ är en asymptotisk pivåvariabel. (5p)

Lösning: Vi har att $S(\theta) = \sum_{i=1}^n S_i(\theta)$ där $S_i(\theta)$ är oberoende med väntevärde 0 och varians $J_1(\theta) = J(\theta)/n$. Det följer av centrala gränsvärdessatsen att $\sqrt{n}(S(\theta)/n)$ konvergerear mot $N(0, J_1(\theta))$ i fördelning och således att $\sqrt{n}(S(\theta)/n)/\sqrt{J_1(\theta)} = S(\theta)/\sqrt{J(\theta)}$ konvergerar mot $N(0,1)$ i fördelning. Då denna fördelning inte beror på θ har vi en asymptotisk pivåvariabel.

Uppgift 5

Låt $\mathbf{X}_{1:n}$ bestå av n oberoende observationer från en bivariat normalfördelning med väntevärdesvektor $\mu = 0$ och kovariansmatris $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho \\ \sigma^2\rho & \sigma^2 \end{pmatrix}$, där $\sigma^2 \neq 0$.

a) Bestäm ML-skattarna $\hat{\sigma}^2_{\text{ML}}$ och $\hat{\rho}_{\text{ML}}$. (5p)

Hjälp med matrisinvertering: För reella tal a, b, c sådana att $ac \neq b^2$ gäller $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Lösning:
First $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$.
Next log-likelihood $l(\sigma^2, \rho) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(\log|\mathbf{\Sigma}| + (x_i, y_i)\mathbf{\Sigma}^{-1}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}\right) = -\frac{n}{2}\log\{\sigma^4(1-\rho^2)\} - \frac{Q(\rho)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}$, with $Q(\rho) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\rho x_i y_i + y_i^2)$.
Then score vector $(dl(\sigma^2,\rho)/d\sigma^2, dl(\sigma^2,\rho)/d\rho)^\top = (-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{Q(\rho)}{2\sigma^4(1-\rho^2)}, \frac{n\rho}{1-\rho^2} + \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)}\left\{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\rho Q(\rho)}{1-\rho^2}\right\})^\top$.
Setting score vector to zero results in $\hat{\rho}_{\text{ML}} = \frac{2\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)}$ and $\hat{\sigma}^2_{\text{ML}} = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)/(2n)$.

b) Bestäm profil-likelihood-funktionen $L_p(\rho)$. (3p)

Lösning: $L_p(\rho) = L(\hat{\sigma}^2_{\text{ML}}(\rho), \rho)$. $\hat{\sigma}^2_{\text{ML}}(\rho)$ is solved by $dl(\sigma^2,\rho)/d\sigma^2 = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{Q(\rho)}{2\sigma^4(1-\rho^2)} = 0$ with fixed ρ, implying $\hat{\sigma}^2_{\text{ML}}(\rho) = \frac{Q(\rho)}{2n(1-\rho^2)}$. Up to a normalization constant, $L(\hat{\sigma}^2_{\text{ML}}(\rho), \rho) \propto \left[\frac{Q^2(\rho)}{4n^2(1-\rho^2)}\right]^{-n/2} \exp\left\{-\frac{Q(\rho)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}$.

c) Beskriv, i termer av resultaten från a) och b), hur man kan utföra ett generalized-likelihood-ratio-test av hypotesen $H_0 : \rho = 0$ på nivån 5%. (2p)

Lösning: See p. 148 of the course book.

Uppgift 6

Låt $(x_1, \ldots, x_n)$ vara ett slumpmässigt stickprov från en normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ.

a) Bestäm Fishers förväntade informationsmatris $\mathbf{J}(\mu, \sigma)$. (6p)

Lösning: Note: the parameters are (μ, σ) here which is different from those in Example 5.3 in the course book. Let $\theta = (\mu, \sigma)^\top$, log-likelihood $l(\theta) = -n\log\sigma - \frac{\sum_i (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$. Fisher information matrix $\mathbf{I}(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} n & \frac{2}{\sigma}\sum_i (x_i - \mu) \\ \frac{2}{\sigma}\sum_i (x_i - \mu) & -n + \frac{3}{\sigma^2}\sum_i (x_i - \mu)^2 \end{pmatrix}$. Expected Fisher info matrix $\mathbf{J}(\theta) = E(\mathbf{I}(\theta)) = \begin{pmatrix} n/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2n/\sigma^2 \end{pmatrix}$.

b) Bestäm Jeffreys bivariata apriorifördelning $f(\mu, \sigma)$. Är fördelningen $f(\mu, \sigma)$ "proper" eller "improper"? (4p)

Lösning: Jeffreys prior $f(\mu, \sigma) = \sqrt{|\mathbf{J}(\theta)|} \propto 1/\sigma^2$, which is improper.

Lycka till!

Formelsamling med användbara fördelningar

Betafördelningen $X \sim Beta(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$E(X) = \alpha/(\alpha+\beta)$, $V(X) = \alpha\beta/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$

Binomialfördelningen $X \sim Binomial(n, p), \quad 0 \leq p \leq 1, n = 1, 2, \ldots.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

χ^2**-fördelningen** $X \sim \chi^2(k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = k$, $V(X) = 2k$.
Några approximativa kvantiler:

$k = 1; \quad P(X > 3.84) = 0.05$
$k = 2; \quad P(X > 5.99) = 0.05$
$k = 3; \quad P(X > 7.81) = 0.05$

Gammafördelningen $X \sim Gamma(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \alpha/\beta$, $V(X) = \alpha/\beta^2$.

Geometriska fördelningen $X \sim Geometrisk(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x; \theta) = (1-\theta)^x \theta, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = (1-\theta)/\theta$, $V(X) = (1-\theta)/\theta^2$.

Normalfördelningen $\mathbf{X} \sim N(\mu, \mathbf{\Sigma}), \quad \det \mathbf{\Sigma} > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(\mathbf{x}|\mu, \mathbf{\Sigma}) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

$E(\mathbf{X}) = \mu$, $Cov(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$.
Några approximativa kvantiler för 1-dimensionella $N(0,1)$:
$P(X > 2.58) = 0.005, P(X > 2.33) = 0.01, P(X > 1.96) = 0.025, P(X > 1.64) = 0.05.$

Poissonfördelningen $X \sim Poisson(\lambda), \quad \lambda > 0.$
Sannolikhetsfunktion:

$$p(x|\lambda) = \frac{1}{x!}\lambda^x \exp(-\lambda), \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

$E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.

Rayleighfördelningen $X \sim Rayleigh(\theta), \quad \theta > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\theta) = \frac{x}{\theta}\exp(-\frac{x^2}{2\theta}), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \sqrt{\pi\theta/2}$, $V(X) = (4-\pi)\theta/2$.

Weibullfördelningen $X \sim Weibull(\lambda, k), \quad \lambda > 0, k > 0.$
Täthetsfunktion:

$$p(x|\lambda, k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), \quad x \geq 0.$$

$E(X) = \lambda\Gamma(1+1/k)$, $V(X) = \lambda^2(\Gamma(1+2/k) - \Gamma(1+1/k)^2)$.