STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
Statistisk inferensteori
Fredagen den 25 maj 2012

Tentamen för kursen Statistisk inferensteori

Fredagen den 25 maj 2012 9 - 14

Examinator: Anders Björkström, tel. 16 45 54.
Återlämning: Fredagen den 1 juni 2012 kl 15.00. Rum 312, hus 6. Den som vill veta sitt resultat tidigare kan skicka en förfrågan till bjorks@math.su.se.
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare och bifogad tabell. Observera att viss ledning ges efter det sista problemet.
Krav för godkänt: Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Följande gränser gäller för de godkända betygsstegen (inklusive poäng från inlämningsuppgifterna):

A	B	C	D	E
58	52	45	38	33

Uppgift 1

Variablerna X_1, $X_2, \ldots$ X_n är ett stickprov av storlek n från en kontinuerlig fördelning med fördelningsfunktion $F(x)$ och täthetsfunktion $f(x) = F'(x)$. Låt $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ beteckna det ordnade stickprovet.

a) Härled fördelningsfunktionen för $X_{(k)}$ för ett godtyckligt $k \leq n$. (5 p)

b) Härled täthetsfunktionen för $X_{(k)}$ för ett godtyckligt $k \leq n$. (5 p)

Uppgift 2

a) Definiera begreppen *Typ I-fel* och *Typ II-fel*. (Det är tillåtet att förutsätta att vi vet vad som menas med nollhypotes och alternativhypotes). (2 p)

b) Förklara vad som menas med *enkel hypotes* respektive *sammansatt hypotes.* (2 p)

c) Formulera Neyman-Pearsons lemma (utan bevis). (6 p)

Uppgift 3

Man önskar skatta sannolikheten p att lyckas i ett visst experiment. Aprioorifördelningen för p är en Betafördelning med väntevärde 0.4 och varians 0.04. Beräkna Bayesskattningen av p vid kvadratisk förlustfunktion om experimentet utförs 20 gånger varav 7 lyckas. (10 p)

Uppgift 4

Variabeln Y är Poissonfördelad med parameter c. Vi vill testa nollhypotesen $\mathrm{H}_0 : \ c = 0.5$ mot alternativhypotesen $\mathrm{H}_A : \ c > 0.5$, på basis av ett enda utfall, $Y = y$. Vi genomför testet såhär: Om Y blir 0 accepteras H_0. Om $Y \geq 3$ förkastas H_0. Om Y blir 1 eller 2 randomiserar vi, så att vi förkastar H_0 med sannolikheten p_1 om $Y = 1$ och p_2 om $Y = 2$.

a) Om $p_2 = 1$, vilket värde måste p_1 ha för att risken för ett Typ I-fel skall bli 10 % ? (5 p)

b) Bestäm p_1 och p_2 så att risken för ett Typ I-fel blir 10 % och testets styrka när $c = 1$ blir så stor som möjligt. (5 p)

Uppgift 5

Låt $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ vara ett stickprov från en geometrisk fördelning med sannolikhetsfunktionen

$$f(x|\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^x \quad x = 0, 1, 2 \ldots$$

a) Visa att denna fördelning tillhör en exponentialfamilj. (2 p)

b) Härled ML-skattningen av θ och dennas varians som funktion av n. (4 p)

c) Är ML-estimatorn effektiv? (4 p)

Uppgift 6

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov från en exponentialfördelning med parametern λ (väntevärdet $1/\lambda$). Vi vill testa nollhypotesen att $\lambda = 1$ mot alternativet att $\lambda > 1$.

a) Härled ett likformigt starkaste test. (4 p)

b) Finn n så att testet har styrkan 0.80 om $\lambda = 4$ och signifikansnivån 0.05. (6 p)

Ledning: Använd den bifogade tabellen och utnyttja att $2\lambda X_i$ är $\chi^2(2)$–fördelad.

- Några kvantiler i den standardiserade normalfördelningen:

$$\Phi(0) = 0.5, \quad \Phi(1.64) = 0.95, \quad \Phi(1.96) = 0.975, \quad \Phi(2.33) = 0.99$$

- En variabel som är Betafördelad(r, s) har väntevärde $r/(r+s)$ och varians $rs/((r+s+1)(r+s)^2)$.

- En variabel S som är negativt binomialfördelad (r, p) har sannolikhetsfunktionen

$$\mathrm{P}(S = s) = \binom{s-1}{r-1} p^r (1-p)^{s-r} \quad \text{för } s = r, r+1 \ldots$$

- *Trinomialkoefficienterna:* Om de fyra naturliga talen a, b, c och n uppfyller villkoret $a + b + c = n$ så definierar man

$$\binom{n}{a,\, b,\, c} = \frac{n!}{a!\; b!\; c!}$$

Lycka till!