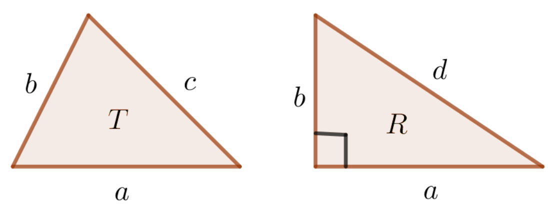
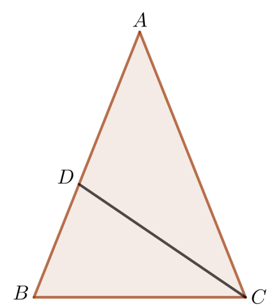
Svar och lösningar till tentamen i Utvalda teman för lärare i matematik MM4000 den 18 januari 2019

1. Se kursmaterialet för bevis för Pythagoras sats. Omvändningen säger att om a, b, c är längderna av sidorna i en triangel T och $a^2 + b^2 = c^2$, så är vinkeln som står mot sidan c rät. För beviset betraktar vi en rätvinklig triangel R med kateter a och b. Längden d av hypotenusan ges då av $d^2 = a^2 + b^2$, så $d = c$. Enligt andra kongruensfallet SSS är R och T kongruenta, så T är rätvinklig.



$a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = d^2$

2.a) Enligt basvinkelsatsen är vinklarna vid B och C lika. Om vinkeln vid A är u grader, så är de vid B och C båda $2u$ grader. Alltså är $u+2u+2u = 180$, varav $u = 36$ grader. Eftersom CD är bisektris till C, så är $\wedge BCD = 36°$ och vi får $\wedge BDC = 180 - 36 - 72 = 72$ grader. Av tredje likformighetsfallet VVV följer att $\triangle CDB \sim \triangle ABC$. Speciellt är $\triangle CDB$ likbent, $|CD| = |BC|$. Eftersom $\wedge DCA = \wedge ACD = 36°$, så är $\triangle ADC$ likbent, $|CD| = |AD|$.



Vi kan anta att $|AB| = 1$ och sätter $|BC| = x$, så att $|BC|/|AB| = x$. Då är även $|CD| = |AD| = x$ och härav får vi $|DC| = 1 - x$. Likformigheten $\triangle CDB \sim \triangle ABC$ betyder att

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|}$$

det vill säga att

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

Detta ger andragradsekvationen $x^2 + x = 1$ som har rötterna

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

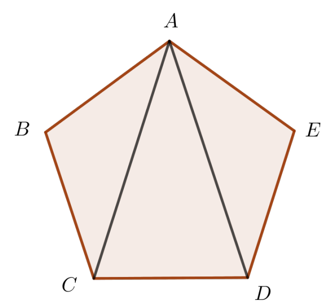
Men $x > 0$, så

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Talet x (eller ibland $1/x$) kallas *det gyllene snittet.*

b) Vinkelsumman i en femhörning är $3 \cdot 180 = 540$ grader, så hörnvinkeln i en regelbunden femhörning är $540/5 = 108$ grader. Triangeln $\triangle ABC$ är likbent eftersom $|BA| = |BC|$, så $\wedge BAC = \wedge BCA$. Då $\wedge B$ är 108 grader, så följer att $\wedge BAC = \wedge BCA = (180 - 108)/2 = 36$ grader. Då är även $\wedge DAC = 36$ grader, varför $\wedge CAD = 108 - 36 - 36 = 36$ grader. Triangeln $\triangle ACD$ är likbent, $|AC| = |AD|$, så basvinkelsatsen ger $\wedge ACD = \wedge ADC$. Alltså är $\wedge ACD = \wedge ADC = (180 - 36)/2 = 72$ grader. Enligt uppgift a) är således förhållandet mellan diagonalen AC och sidan AB lika med

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$



3 och 4. Se kursmaterialet.

5. Eftersom x_1, x_2, x_3 är rötterna till $x^3 + px + q = 0$, så gäller $x_i^3 = -px_i - q$ och alltså $x_i^4 = -px_i^2 - qx_i$. Alltså är

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q(x_1 + x_2 + x_3).$$

Här är $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ då ekvationen saknar andragradsterm. Vidare är

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0^2 - 2p = -2p.$$

Vi får

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (-p)(-2p) - q \cdot 0 = 2p^2.$$

6. Antag att $x^3+px+q=0$ har en dubbelrot och beteckna rötterna med α, α, β. Enligt sambanden mellan rötter och koefficienter gäller

$$2\alpha + \beta = 0, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta = p \quad \alpha^2\beta = -q.$$

Om vi sätter in $\beta = -2\alpha$ i $\alpha^2 + 2\alpha\beta = p$, så får vi

$$\alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2 = p,$$

varav

$$\alpha = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$