Lösningar till tentamen

Matematisk för Naturvetenskaper II, 190527.

1) Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 101 &= 2 \cdot 41 + 19 \\ 41 &= 2 \cdot 19 + 3 \\ 19 &= 6 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

Vi får därför att $1 = 19 - 6 \cdot 3 = 19 - 6(41 - 2 \cdot 19) = 13 \cdot 19 - 6 \cdot 41 = 13(101 - 2 \cdot 41) - 6 \cdot 41 = 13 \cdot 101 - 32 \cdot 41$, vilket visar att $x_0 = -32$ och $y_0 = 13$ är en lösning till den Diofantiska ekvationen $41x + 101y = 1$, och därmed att $x_1 = -224000$ och $y_1 = 91000$ är en lösning till $41x + 101y = 7000$. Den allmänna lösningen blir därför $x = -224000 + 101m, y = 91000 - 41m$ ($m \in \mathbb{Z}$). Villkoren $x \geq 0, y \geq 0$ ger att

$$-224000 + 101m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2217,82,$$

$$91000 - 41m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2219,51,$$

dvs vi får lösningar för $m = 2218$ och $m = 2219$. Insättning i formlerna ger lösningarna $(18, 62)$ och $(119, 21)$.

2.a) Den snabbaste och elegantaste lösningen ser ut så här: Antalet sådana tvåsiffriga tal är precis lika med antalet sätt att välja ut en delmängd med två element bland talen $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$, dvs

$$\binom{10}{2} = 45.$$

Men i det här fallet går det också ganska enkelt att räkna efter direkt: 9 kan följas av vilken siffra som helst från 0 till 8. 8 kan följas av vilken siffra som helst från 0 till 7 osv. Sammanlagt får vi $9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45$ möjliga tal.
b) På samma sätt blir antalet fyrsiffriga tal precis lika med antalet sätt att välja ut en delmängd med fyra element bland talen $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$, dvs

$$\binom{10}{4} = 210.$$

Här är det betydligt svårare att räkna ut svaret direkt genom att tänka igenom alla möjligheter.

3. Vi gör först en enkel grafritning av funktionen $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$. Vi får derivatan: $f'(x) =$

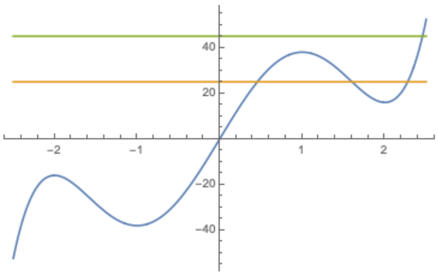
$$D\left(3x^5 - 25x^3 + 60x\right) = 15x^4 - 75x^2 + 60.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

vilket med $t = x^2$ ger ekvationen $t^2 - 5t + 4 = 0$ med lösningarna $t = 1$ och $t = 4$. Detta ger i sin tur fyra möjliga lösnigar för x, nämligen $x = \pm 1, \pm 2$. Vi får följande teckentabell:

x		-2		-1		1		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty \nearrow$	-16	$\searrow$	-38	$\nearrow$	38	$\searrow$	16	$\nearrow \infty$

Frågan om antalet lösningar till ekvationerna är ekvivalent med frågan om antalet skärningspunkter mellan grafen och linjen $y = 25$ respektive linjen $y = 45$.



Eftersom $16 < 25 < 38$ befinner vi oss i det första fallet i det intervall där det finns tre reella lösningar.
Eftersom $38 < 45$ befinner vi oss i det andra fallet i det intervall där det bara finns en reell lösning.

4.a) Bevisen görs tydligast med induktion. För att visa att följden är växande betecknar vi med P_n påståendet att $a_{n+1} - a_n \geq 0$. Vi noterar först att P_0 är sant eftersom $a_1 - a_0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} > 0$. Antag nu att vi vet att P_n är sant. Då följer att

$$VL_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} =$$

$$\frac{1}{2}(1 + a_{n+1}^2) - \frac{1}{2}(1 + a_n^2) =$$

$$\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) \geq 0 = HL_{n+1},$$

där vi i sista steget använt induktionsantandet $a_{n+1} - a_n \geq 0$ och att alla $a_n \geq 0$ (enligt definitionen). Enligt induktionsprincipen följer nu att P_n är sant för alla $n \geq 0$, dvs följden är växande.

För att visa att följden är uppåt begränsad betecknar vi med Q_n påståendet att $1 - a_n \geq 0$. Vi noterar att Q_0 är sant eftersom $1 - a_0 = 1 > 0$. Antag att vi vet att Q_n är sant. Då följer att

$$VL_{n+1} = 1 - a_{n+1} =$$

$$1 - \frac{1}{2}(1 + a_n^2) = \frac{1}{2}(1 - a_n^2) =$$

$$\frac{1}{2}(1 - a_n)(1 + a_n) \geq 0 = HL_{n+1},$$

där vi i sista steget använt induktionsantandet $1 - a_n \geq 0$ och att alla $a_n \geq 0$. Enligt induktionsprincipen följer nu att Q_n är sant för alla $n \geq 0$, dvs följden är uppåt begränsad (av talet 1).

b) Vi vet från en allmän sats i kursboken att varje växande och uppåt begränsad talföljd konvergerar. Med $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ så följer via räknereglerna för gränsvärden att

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n^2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}(1 + A^2).$$

Den sista ekvationen har den unika lösningen $A = 1$, så därmed har vi visat att följdens gränsvärde är 1.

c) Samma bevis som i a) visar att följden $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ är växande. Samma argument som i b) visar att det enda möjliga gränsvärdet för följden är 1. Men detta är omöjligt, eftersom redan $b_0 = 2 > 1$. Slutsatsen blir att följden inte kan konvergera, och inte heller vara begränsad. Alltså måste gälla att

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

5. Integralen beräknas lämpligen i polära koordinater:

$$\iint_D x^2y^3\,dxdy = \left[\begin{array}{rr} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \end{array}\right] =$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^1 (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^3\,rdrd\theta =$$

$$\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos^2\theta\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^6dr\right).$$

I den första integralen gör vi omskrivningen $\cos^2\theta\sin^3\theta = \cos^2\theta(1 - \cos^2\theta)\sin\theta$ och substituerar:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos^2\theta\sin^3\theta\,d\theta = \begin{bmatrix} t = & \cos\theta \\ dt = & -\sin\theta d\theta \end{bmatrix}$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} t^2(1 - t^2)(-dt) =$$

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(t^2 - t^4)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{7\sqrt{2}}{60}.$$

Den andra integralen är enklare:

$$\int_0^1 r^6\,dr = \left[\frac{1}{7}r^7\right]_0^1 = \frac{1}{7}.$$

Tillsammans ger detta

$$\iint_D x^2y^3\,dxdy = \frac{7\sqrt{2}}{60}\cdot\frac{1}{7} = \frac{\sqrt{2}}{60}.$$

6a. Vektorn $u = (x, y, z)$ avbildas vid projektion på planet $x + y + z = 0$ på vektorn $u + t\cdot N$ där $N = (1, 1, 1)$ är normalvektorn till planet och parametern t bestäms av att $(x, y, z) + t(1, 1, 1) = (x + t, y + t, z + t)$ ska uppfylla planets ekvation, dvs

$$(x+t)+(y+t)+(z+t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}(x+y+z).$$

Projektionen T ges nu av

$$P(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{1}{3}(x+y+z)(1, 1, 1) =$$

$$(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z),$$

ur vilket vi i sin tur kan läsa av matrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för speglingen S i planet $x + y = 0$ kan vi skriva upp direkt eftersom vi ser att e_x avbildas på $-e_y$ och e_y avbildas på $-e_x$, medan e_z avbildas på e_z. Detta ger matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi erhåller nu matrisen C för den sammansatta avbildningen genom att multiplicera ihop matriserna A med B (i denna ordning): $C = AB =$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

/Martin Tamm/190527