Stockholms universitet, Institutionen för matematik

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 20 mars 2020, 9:00–17:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Lösningar till uppgifterna ska göras självständigt utan någon form av kommunikation med annan person. Alla hjälpmedel är tillåtna.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa. Om numerisk lösning efterfrågas och du har brist på tid för numeriska beräkningar: visa med matematiska symboler hur uppgiften ska lösas.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 0

(Obligatorisk uppgift) Försäkrar du att de lösningar du lämnar in gjorts av dig utan hjälp av eller kommunikation med annan person?

Uppgift 1

Låt $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ vara oberoende av följden $X_1, X_2, \dots$ av oberoende stokastiska variabler som alla har fördelningen $\mathrm{P}(X_k = 3) = p$ och $\mathrm{P}(X_k = 1) = 1 - p$ för $p \in (0, 1)$. Låt $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ vara en (mycket förenklad) modell för det totala skadebeloppet för det kommande året. Betrakta ett XL-skydd sådant att det överskjutande beloppet över nivån 2 för enskilda skador betalas av återförsäkringsbolaget. Låt D vara totala skadebeloppet för ursprungliga försäkringsbolaget som köpt XL-skyddet och låt R vara totala skadebeloppet för återförsäkringsbolaget. Bestäm korrelationskoefficienten $\mathrm{Cor}(D, R)$. (10 p)

Uppgift 2

Ett försäkringsbolag vill analysera lönsamheten för en ny produkt som planeras att erbjudas nästa år. Låt p beteckna årspremien och d självrisken för produkten. Låt antalet tecknade försäkringskontrakt vara en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde $\lambda(p, d)$. Antalet skadehändelser för ett givet kontrakt är en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ och ger upphov till oberoende och likafördelade skadestorlekar med fördelningsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{-\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Antalet skadehändelser för olika kontrakt är oberoende och oberoende av antalet tecknade kontrakt. Skadebeloppen är oberoende av antalet skadehändelser och antalet tecknade kontrakt. Bestäm ett uttryck för väntevärdet för försäkringsbolagets premieintäkter minus skadeutbetalningar för de kontrakt som tecknas under det kommande året. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta historiska aggregerade/kumulativa utbetalningar för en viss produkt i skadetriangeln i Tabell 1. Antag att utbetalningsdata uppfyller antagandena som ligger till grund för skattningen av Thomas Mack av det betingade medel-kvadrat-felet för chain-ladder-metoden. Använd den s.k. varians-dekompositions-formeln

$$\mathrm{Var}(X \mid Z) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y) \mid Z] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X \mid Y] \mid Z)$$

för att bestämma

$$\mathrm{E}\left[(R_3 - \widehat{R}_3)^2 \mid \mathcal{D}\right]$$

uttryckt i observerad data och okända modellparametrar f_k, σ_k, $k = 1, \ldots, 4$, där R_3 är summan av utestående betalningar för skadeår 3, $\mathcal{D} = \{C_{i,k} : i + k \leq 6\}$ är observerad data och $\widehat{R}_3$ är prediktorn av R_3 i termer av $C_{i,k} \in \mathcal{D}$. (10 p)

	1	2	3	4	5
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,5}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	$\mathbf{C_{2,5}}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	$\mathbf{C_{3,4}}$	$\mathbf{C_{3,5}}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$\mathbf{C_{4,3}}$	$\mathbf{C_{4,4}}$	$\mathbf{C_{4,5}}$
5	$C_{5,1}$	$\mathbf{C_{5,2}}$	$\mathbf{C_{5,3}}$	$\mathbf{C_{5,4}}$	$\mathbf{C_{5,5}}$

Table 1: Kumulativa utbetalda belopp. För $i+k > 6$ är $\mathbf{C_{i,k}}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 4

Betrakta ett nystartat försäkringsbolag som ska introducera en ny försäkringsprodukt. Antag att antalet kontrakt kan modelleras som en stokastisk variabel med väntevärde 10^4 och standardavvikelse 10^4. Antag att för varje kontrakt gäller att skada sker med sannolikhet 5% och att skadebeloppet i så fall har väntevärde 10^4 kronor och standardavvikelse $2 \cdot 10^3$ kronor. Antag att alla skadebelopp betalas inom ett år och är oberoende och likafördelade och oberoende av antalet kontrakt. Antag vidare att premien för ett kontrakt sätts till 120% av det förväntade skadebeloppet per kontrakt. Antag att försäkringsbolaget har initialt kapital på ett bankkonto, som inte betalar ränta, med saldo x kronor. För vilka x är försäkringsbolaget solvent enligt Value-at-Risk på nivån 0.5% med en 1-årshorizont. Gör en lämplig normalapproximation i samband med solvensberäkningen. För standardnormalfördelningen gäller $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58$. (10 p)

Uppgift 5

Betrakta följande modell (fördelning) för skadebeloppet X:

$$\mathrm{P}(X \leq x) = p\Big(1 - \Big(1 + \frac{x}{\gamma}\Big)^{-\alpha}\Big) + (1-p)\Big(1 - e^{-cx^{\tau}}\Big), \quad x > 0,$$

där $p = 0.2$, $\gamma = 20$, $\alpha = 4$, $c = 0.01$, $\tau = 3$. Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende och fördelade som X. Approximera den betingade sannolikheten

$$\mathrm{P}(X_2 > x \mid X_1 + X_2 + X_3 > x)$$

för mycket stora värden på x. (10 p)

Uppgift 1

Låt

$$N_h := \sum_{k=1}^{N} I\{X_k = 3\}, \quad N_l := \sum_{k=1}^{N} I\{X_k = 1\}$$

och notera att $N_h \sim \mathrm{Pois}(p\lambda)$ och $N_l \sim \mathrm{Pois}((1-p)\lambda)$ är oberoende. Notera att

$$S = D + R = \sum_{k=1}^{N} \min(X_k, 2) + \sum_{k=1}^{N} \max(X_k - 2, 0) = \big(2N_h + N_l\big) + N_h.$$

Notera att

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(D,R) &= \mathrm{Cov}(2N_h, N_h) = 2\,\mathrm{Var}(N_h) = 2p\lambda, \\ \mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}(2N_h) + \mathrm{Var}(N_l) = 4p\lambda + (1-p)\lambda = (1+3p)\lambda, \\ \mathrm{Var}(R) &= \mathrm{Var}(N_h) = p\lambda. \end{aligned}$$

Alltså:

$$\mathrm{Cor}(D,R) = \frac{2p}{\sqrt{1+3p}\sqrt{p}}$$

Uppgift 2

Intäkter I och utgifter U modelleras enligt:

$$I = \sum_{k=1}^{N} p, \quad U = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N_k} \max(X_{k,l} - d, 0).$$

Motsvarande väntevärden är $\mathrm{E}[I] = \lambda(p,d)p$ och

$$\mathrm{E}[U] = \lambda(p,d)\mu\,\mathrm{P}(X > d)\,\mathrm{E}[X - d \mid X > d].$$

Eftersom

$$\mathrm{P}(X - d > x \mid X > d) = \frac{\mathrm{P}(X > d + x)}{\mathrm{P}(X > d)} = \frac{(1 + (d+x)/\gamma)^{-\alpha}}{(1 + d/\gamma)^{-\alpha}} = \Big(1 + \frac{x}{\gamma + d}\Big)^{-\alpha}$$

ser vi att $\mathrm{E}[X - d \mid X > d] = (\gamma + d)/(\alpha - 1)$. Dvs,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[I - U] &= \lambda(p,d)\Big(p - \mu\Big(1 + \frac{d}{\gamma}\Big)^{-\alpha}\Big(\frac{\gamma + d}{\alpha - 1}\Big)\Big) \\ &= \lambda(p,d)\Big(p - (\gamma + d)^{-\alpha+1}\Big(\frac{\mu\gamma^{\alpha}}{\alpha - 1}\Big)\Big) \end{aligned}$$

En rimlig modell för $\lambda(p,d)$ vore $\lambda(p,d) = f(d)/p^{\beta}$ med $\beta \geq 1$ eftersom det är rimligt att antaga att $\limsup_{p\to\infty} \mathrm{E}[I] < \infty$.

Uppgift 3

$$\mathrm{E}\left[(R_3 - \widehat{R}_3)^2 \mid \mathcal{D}\right] = \mathrm{Var}(R_3 \mid \mathcal{D}) + \Big(\mathrm{E}[R_3 \mid \mathcal{D}] - \widehat{R}_3\Big)^2$$

där storheterna beräknas enligt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[R_3 \mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{3,5} - C_{3,3} \mid C_{3,3}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[C_{3,5} \mid C_{3,4}] \mid C_{3,3}] - C_{3,3} \\
&= \mathrm{E}[f_4 C_{3,4} \mid C_{3,3}] - C_{3,3} \\
&= (f_4 f_3 - 1)C_{3,3}, \\
\widehat{R}_3 &= (\widehat{f}_4 \widehat{f}_3 - 1)C_{3,3}, \quad \widehat{f}_4 = \frac{C_{1,5}}{C_{1,4}}, \quad \widehat{f}_3 = \frac{C_{1,4} + C_{2,4}}{C_{1,3} + C_{2,3}} \\
\mathrm{Var}(R_3 \mid \mathcal{D}) &= \mathrm{Var}(C_{3,5} \mid C_{3,3}) \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(C_{3,5} \mid C_{3,4}) \mid C_{3,3}] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[C_{3,5} \mid C_{3,4}] \mid C_{3,3}) \\
&= \mathrm{E}[\sigma_4^2 C_{3,4} \mid C_{3,3}] + \mathrm{Var}(f_4 C_{3,4} \mid C_{3,3}) \\
&= f_3 \sigma_4^2 C_{3,3} + f_4^2 \sigma_3^2 C_{3,3}
\end{aligned}$$

Uppgift 4

Försäkringsbolagets kapital i slutet av året är

$$x + S = x + \sum_{k=1}^{N} \Big(1.2\,\mathrm{E}[I_k X_k] - I_k X_k\Big)$$

Vidare gäller att

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S] &= \mathrm{E}[N] \cdot 0.2 \cdot \mathrm{E}[I_k]\,\mathrm{E}[X_k] = 0.01 \cdot 10^4 \cdot 10^4 = 10^6, \\
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(I_k X_k) + \mathrm{Var}(N) \cdot (0.2\,\mathrm{E}[I_k X_k])^2
\end{aligned}$$

Notera att

$$\mathrm{Var}(I_k X_k) = \mathrm{E}[I_k^2 X_k^2] - \mathrm{E}[I_k X_k]^2 = 0.05(4 \cdot 10^6 + 10^8) - 0.05^2 \cdot 10^8 = 4.95 \cdot 10^6$$

vilket ger

$$\mathrm{Var}(S) = 4.95 \cdot 10^{10} + 10^8 \cdot 0.2^2 \cdot 0.05^2 \cdot 10^8 = 1.0495 \cdot 10^{12}$$

Normalapproximation ger

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{0.005}(x + S) &\approx -x - \mathrm{E}[S] + \mathrm{Var}(S)^{1/2} \Phi^{-1}(0.995) \\
&\approx -x - 10^6 + \sqrt{1.0495} \cdot 10^6 \cdot 2.58 \\
&\approx -x - 1.64 \cdot 10^6
\end{aligned}$$

dvs $x \approx 1.64 \cdot 10^6$ kronor är tillräckligt stort bufferkapital.

Uppgift 5

$$\mathrm{P}(X > x) = p\Big(1 + \frac{x}{\gamma}\Big)^{-\alpha} + (1-p)e^{-cx^\tau} \approx p\Big(1 + \frac{x}{\gamma}\Big)^{-\alpha}$$

för stora x (lättsvansad Weibull ty $\tau > 1$ blandad med tungsvansad Pareto) och (vilket ska visas)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{P}(X > \lambda x)}{\mathrm{P}(X > x)} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\gamma + \lambda x}{\gamma + x}\right)^{-\alpha} = \lambda^{-\alpha}.$$

Eftersom fördelningen för X har en reguljärt varierande svans är den subexponentiell, alltså gäller att

$$\mathrm{P}(X_2 > x \mid X_1 + X_2 + X_3 > x) = \frac{\mathrm{P}(X_2 > x)}{\mathrm{P}(X_1 + X_2 + X_3 > x)} \approx \frac{1}{3}$$

för stora x