Lösningsförslag till Linjär algebra, MM5012, den 5 maj 2021

1. (a) Ange en matris A vars nollrum spänns upp av vektorerna $(2,-3,1,1,-1)$, $(1,0,-2,1,1)$, $(2,-2,1,0,-1)$ och $(-8,3,1,1,1)$ i $\mathbb{R}^5$.

   (b) Bestäm vidare dimensionen av nollrummet och dimensionen av bildrummet till A.

   Lösningsförslag: Vi kan visa till exempel med Gauss elimination, att nollrummet har dimension 3. Matrisen A kan vara t ex $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, vilket följs av satsen $\mathbb{R}^5 = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^t)$ och en bas till $\mathcal{R}(A^t)$ är t ex

$$(1,0,3,0,5),(0,1,-1,1,-3).$$

   Enligt dimensionssatsen har bildrummet dimension 2.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Visa att b, Ab, A^2b, A^3b är linjärt oberoende i $\mathbb{R}^4$.

   (b) Sätt nu matrisen $M = (b\ Ab\ A^2b\ A^3b)$ och låt r vara den sista raden i M^{-1}. Visa, utan att beräkna inversen, att matrisen $\begin{pmatrix} r \\ rA \\ rA^2 \\ rA^3 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

   Lösningsförslag: Eftersom $\det(M)$ är nollskild där matrisen $(b, Ab, A^2b, A^3b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}$ och $*$ är något tal, är kolonnerna b, Ab, A^2b, A^3b linjärt oberoende.

   Vi bevisar nu raderna i matrisen r, rA, rA^2, rA^3 är linjärt oberoende vilket är ekvivalent med att

$$\alpha_0 r + \alpha_1 rA + \alpha_2 rA^2 + \alpha_3 rA^3 = 0 \qquad (*)$$

   medför att $\alpha_i = 0$ för $i = 0,1,2,3$, vilket ska bevisas. Ekvationen (*) multipliceradmed b från höger ger

$$\alpha_0 \underbrace{rb}_{0} + \alpha_1 \underbrace{rAb}_{0} + \alpha_2 \underbrace{rA^2b}_{0} + \alpha_3 \underbrace{rA^3b}_{1} = 0$$

eftersom $M^{-1}M = I_4$, 4×4-enhetsmatrisen. Dvs $rb = rAb = rA^2b = 0$ och $rA^3b = 1$. Då har vi $\alpha_3 = 0$. Då blir (*)

$$\alpha_0 r + \alpha_1 rA + \alpha_2 rA^2 = 0.$$

Multiplicera denna ekvation med Ab har vi

$$\alpha_0 \underbrace{rAb}_{0} + \alpha_1 \underbrace{rA^2b}_{0} + \alpha_2 \underbrace{rA^3b}_{1} = 0. \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 r + \alpha_1 rA = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha_0 \underbrace{rA^2b}_{0} + \alpha_1 \underbrace{rA^3b}_{1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Slutligen

$$\alpha_0 r = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = 0 \text{ eller } r = 0.$$

men $r \neq 0$ eftersom den är sista raden i M^{-1}. Då $\alpha_0 = 0$.

3. Låt $V = M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Definiera $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$ för $A, B \in V$.

   (a) Visa att V är ett inre produkt rum.

   (b) Låt $n = 2$. Beräkna avståndet mellan $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

łösningsförslag: Det enklaste är att identifiera $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ med $\mathbb{F}^{n^2}$ genom att stapla kolonner på varandra dvs

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) \leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n^2}$$

där a_i, $i = 1, ..., n$ är kolonnerna till A. Det är lätt inse att för $A = (a_1, ..., a_n)$ och $B = (b_1, ...b_n)$ $\mathrm{tr}(A^*B) = a^*b$, vilket är standard inre produkt på $\mathbb{F}^{n^2}$.

Avståndet mellan givna matriser i inre produktrummet ($\mathbb{F}^{n^2}$ är 3.

4. Låt $q(s) = s^4 - s^3 - 7s^2 + s + 6$. Betrakta vektorrummet $X_q = \{\pi_q(f) : f \in P(R)\}$, där $\pi_q(f)$ är resten vid polynomdivision f med q.

   (a) Bestäm matrisen för den linjära avbildning S_q på X_q som definieras genom $S_q(f) = \pi_q(sf)$ för $f \in X_q$ i basen $\mathcal{B} = \{1, s, s^2, s^3\}$.

   (b) Är S_q diagonaliserbar?

łösningsförslag: (a) Basbilderna fås genom polynomdivision. Då $S_q(1) = \pi_q(s\cdot 1) = 0\cdot q + s$, $S_q(s) = \pi_q(s\cdot s) = 0\cdot q + s^2$, $S_q(s^2) = \pi_q(s\cdot s^2) = 0\cdot q + s^3$, $S_q(s^3) = \pi_q(s\cdot s^3) = 1\cdot q + s^3 + 7s^2 - s - 6$. Alltså $S_q(1) = s$, $S_q(s) = s^2$, $S_q(s^2) = s^3$ och $S_q(s^3) = s^3 + 7s^2 - s - 6$. Då är avbildningsmatrisen

$$[S_q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Utveckling av determinant visar $\chi_{[S_q]_{\mathcal{B}}}(s) = q(s) = (s+2)(s+1)(s-1)(s-3)$

5. Vad är determinanterna till följande matriser?

   (a) $A \in M_{(2k-1)\times(2k-1)}(\mathbb{F})$ och $A^t = -A$, där k är ett positivt heltal;

   (b) $M = BC$ där $B \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$, $C \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$ och $k < n$.

   lösningsförslag: (a) Om $A^t = -A$ gäller att $\det(A^t) = \det(-A) \Leftrightarrow \det(A) = -\det(A)$ då $2k-1$ är udda. Så $\det(A) = 0$.

   (b) $\det(M) = 0$ eftersom $\mathrm{rang}(M) \leq \min\{\mathrm{rang}(B), \mathrm{rang}(C)\} \leq k < n$. Då har S_q fyra olika egenvärden. Därför är S_q diagonaliserbar.

6. (a) Visa att $(2x - y + 4z)^2 \leq 21(x^2 + y^2 + z^2)$. (Ledtråd: Betrakta $2x-y+4z$ som inre produkt av två lämpliga vektorer i standardbasen i $\mathbb{R}^3$.)

   (b) Bestäm maximum av $2x - y + 4z$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

   lösningsförslag: (a) Betrakta $u = (2, -1, 4)$ och $v = (x, y, z)$. Standard inre produkten $\langle u, v\rangle = 2x - y + 4z \leq \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ enligt Cauchy-Schwarz' olikhet.

   (b) Av (a) får vi att $2x-y+4z \leq \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{21}$. Nu är 2x-y+4z kontinuerlig på en kompakt mängden (enhetssfär) så är maximum $\sqrt{21}$.