STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
26 november 2021

Tentamen i Sannolikhetsteori I

26 november 2021 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentaresultatet läggs in i ladok senast fredag 10 december.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Antag att händelserna E och F är disjunkta och att $\mathbb{P}(E) > 0$ och $\mathbb{P}(F) > 0$. Påståendet 'E och F är oberoende' är

1. möjligtvis sant
2. alltid falskt
3. alltid sant

b) Låt X vara en stokastisk variabel med $\mathbf{E}[X] = 10$ och $\mathrm{Var}(X) = 15$. Vad är $\mathbf{E}[X^2]$?

1. $\mathbf{E}[X^2] = 1225$
2. $\mathbf{E}[X^2] = 1015$
3. $\mathbf{E}[X^2] = 325$
4. $\mathbf{E}[X^2] = 115$

c) Bestäm $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} dx$. Ledning: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ är täthetsfunktionen för en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2.

1. $8\sqrt{2\pi}$
2. $\sqrt{2\pi}$

3. $2\sqrt{2\pi}$
4. 79
5. $4\sqrt{2\pi}$

d) En urna innehåller fem svarta kulor och fem röda kulor. Vi drar två kulor med återläggning (dvs när vi dragit första kulan lägger vi tillbaka den innan vi drar andra gången). Låt X_1 och X_2 vara definierade genom

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om } i\text{:te kulan svart;} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Definera Y_1 och Y_2 analogt då vi drar utan återläggning (dvs den dragna kulan läggs inte tillbaka i urnan innan vi drar en andra gång). Vad gäller?

1. X_1 och X_2 är oberoende och Y_1 och Y_2 är oberoende.
2. X_1 och X_2 är oberoende men Y_1 och Y_2 är inte oberoende.
3. X_1 och X_2 är inte oberoende men Y_1 och Y_2 är oberoende.

e) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 23$. Vad är sant?

1. $\text{Cov}(X, Y) = 23$
2. $\text{Cov}(X, Y) \geq -23$
3. $\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{23}$
4. Man kan inte dra några slutsatser om $\text{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

Det finns tre olika fågelarter på en ö och vissa av fåglarna är ringmärkta. Av fåglarna är 45% av art 1 (10% av dessa är ringmärkta), 38% av art 2 (15% av dessa är ringmärkta) och 17% av art 3 (50% av dessa är ringmärkta).

a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald fågel är ringmärkt?

b) Man observerar att en fågel inte är ringmärkt. Vad är sannolikheten att den är av art 2?

Uppgift 3

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{om } x \geq 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm c.

b) Beräkna $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

c) Ange fördelningsfunktionen för X.

Svårare del

Uppgift 4

En grupp om $n \geq 3$ personer kastar samtidigt varsitt symmetriskt mynt. Om någon person får ett unikt resultat (dvs personen får krona medan alla andra får klave, eller personen får klave medan alla andra får krona) så vinner den personen. Finns ingen person som har ett unikt resultat anses omgången oavgjord. Man upprepar detta tills en vinnare utses.

a) Vad är sannolikheten att det krävs m omgångar för att utse en vinnare?

b) Vad är det förväntade antalet omgångar som krävs om $n = 10$?

Uppgift 5

Livslängderna hos en viss typ av elektroniska komponenter beskrivs av oberoende lika fördelade stokastiska variabler. Den förväntade livslängden är okänd och för att uppskatta denna planerar man att mäta livslängden hos 250 komponenter och använda den genomsnittliga livslängden bland dessa som uppskattning. Om standardavvikelsen för livslängden hos en komponent är 40 månader, vad är då sannolikheten att uppskattningen avviker högst 5 månader från den sanna förväntade livslängden?

Uppgift 6

Låt X och Y vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter λ_1 respektive λ_2. Härled täthetsfunktionen för X/Y.

Lycka till!