MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 6 december 2021

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen (3p)

$$15x + 71y = 7.$$

   (b) Bestäm den minsta positiva heltalslösningen x till $15x \equiv 7 \pmod{71}$. (1p)

   (c) Avgör, med noggrann motivering, för vilka heltal a som kongruensen $15x \equiv a \pmod{71}$ har heltalslösningar x. (1p)

2. (a) Visa att $2021^{60} - 1$ är delbart med 39. (3p)

   (b) Rita ellipsen (2p)

$$4x^2 + y^2 - 16x - 2y + 13 = 0.$$

   Ange speciellt medelpunkt, halvaxlar och brännpunkter.

3. Låt $p(z) = 8z^5 + 4z^4 + 2z + 1$. Bestäm alla nollställen $z \in \mathbb{C}$ till $p(z)$, samt faktorisera $p(z)$ så långt som möjligt i reella faktorer. (5p)
   Tips: polynomet kanske har något rationellt nollställe.

4. På en arbetsplats finns 3 arbetslag med 10 medarbetare i varje. Man skall utse en festkommitté med 6 medlemmar. På hur många sätt kan detta ske om

   (a) alla 6 skall komma från samma arbetslag? (1.5p)

   (b) det skall vara precis 2 från varje arbetslag? (1.5p)

   (c) det skall vara minst en medlem från varje arbetslag? (2p)

   Svaren får innehålla binomialkoefficienter utom i uppgift (a) där svaret måste vara uträknat.

Var god vänd!

5. Vi har två linjer, den ena ges av (5p)

$$(x, y, z) = (2, 2, 3) + t(1, 0, 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

och den andra är skärningslinjen mellan planen $x - y + z = 1$ och $x - z = 3$. Avgör om linjerna är sammanfallande, parallella, skeva eller skärande, samt bestäm två punkter, en på respektive linje, som ligger så nära varandra som möjligt.

6. Avbildningen F har matrisen $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ i standardbasen i rummet. Betrakta vektorerna (5p)

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}' = (0, 1, 0) \\ \vec{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \\ \vec{e}_3{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1). \end{cases}$$

Visa att $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ bildar en ON-bas för rummet. Avgör om basen är positivt orienterad eller inte. Bestäm matrisen för F i denna bas, samt tolka avbildningen geometriskt.