Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 6 december 2021

1. (a) Vi börjar med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 71 &= 4 \cdot 14 + 11 \\ 15 &= 1 \cdot 11 + 4 \\ 11 &= 3 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1, \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(71, 15) = 1$ och vi kan lösa hjälpekvationen $71x + 15y = 1$ genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 4 - 1 \cdot 3 = 4 - 1 \cdot (11 - 3 \cdot 4) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 11 = 3 \cdot (15 - 1 \cdot 11) - 1 \cdot 11 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11 = 3 \cdot 15 - 4 \cdot (71 - 4 \cdot 15) = 19 \cdot 15 - 4 \cdot 71$. Vi får att $(x, y) = (19, -4)$ är en partikulärlösning till hjälpekvationen. Multipliceras denna med 7 fås en partikulärlösning till vår ekvation, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = 133 - 71k \\ y = -28 + 15k \end{cases} \qquad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Lösningarna x till kongruensen är precis de som vi bestämt i (a), och vi får minsta möjliga positiva x för $k = 1$ vilket ger $x = 62$.

(c) Att lösa kongruensen motsvarar att lösa den diofantiska ekvationen $15x + 71y = a$, vilken är lösbar om och endast om $\mathrm{SGD}(15, 71) = 1 \mid a$, dvs för alla heltal a.

2. (a) Primtalsfaktoriseringen av 39 är $3 \cdot 13$, så räcker det att visa att talet är delbart med 3 och 13. Talet är delbart med 3 eftersom

$$2021^{60} - 1 \equiv (-1)^{60} - 1 = 0 \pmod 3.$$

Nu är $2021 \equiv 6 \pmod{13}$, och enligt Fermats lilla sats får vi $6^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, så

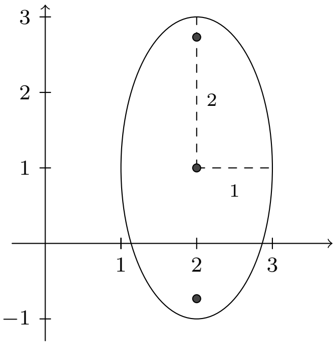
$$2021^{60} - 1 \equiv 6^{12 \cdot 5} - 1 = (6^{12})^5 - 1 \equiv 1^5 - 1 = 0 \pmod{13},$$

vilket därmed visar påståendet.

(b) Efter kvadratkomplettering får vi den normaliserade ekvationen

$$\frac{(x-2)^2}{1^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1.$$

Från detta ser vi att medelpunkten är $(2, 1)$, halvaxeln i x-led är 1, och halvaxeln i y-led är 2. Vidare, om storaxeln är a $(= 2)$, lillaxeln är b $(= 1)$, och avståndet från medelpunkten till brännpunkterna är c gäller $a^2 = b^2 + c^2$. Vi får därmed att $c = \sqrt{3}$, så brännpunkterna är $(2, 1 \pm \sqrt{3})$. Nu kan vi skissa grafen:



3. Om $z = \frac{m}{n}$ är ett rationellt nollställe med $\mathrm{SGD}(m, n) = 1$ gäller $m \mid 1$ och $n \mid 8$, så vi får kandidaterna $z = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Prövning ger att $z = -\frac{1}{2}$ fungerar, så $z + \frac{1}{2}$ är en faktor. Polynomdivision ger

$$p(z) = 8\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z^4 + \frac{1}{4}\right).$$

Vi vill därför lösa $z^4 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow z^4 = -\frac{1}{4}$. Ansätter vi lösningen på polär form $z = re^{\theta i}$ fås $r^4 e^{4\theta i} = \frac{1}{4}e^{\pi i}$. Vi behöver alltså $r^4 = \frac{1}{4}$ och $4\theta = \pi + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$. Vilket ger $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$. Sätter vi in $n = 1, 2, 3, 4$ fås lösningarna $z = \frac{\pm 1 \pm i}{2}$, så de 5 lösningarna är alltså $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_{2,3,4,5} = \frac{\pm 1 \pm i}{2}$. Parar vi ihop konjugerade nollställen får vi

$$\begin{aligned} p(z) =& 8\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\left(z - \frac{1+i}{2}\right)\left(z - \frac{1-i}{2}\right)\right)\left(\left(z - \frac{-1+i}{2}\right)\left(z - \frac{-1-i}{2}\right)\right) \\ =& (2z+1)(2z^2 - 2z + 1)(2z^2 + 2z + 1). \end{aligned}$$

4. (a) Arbetslaget kan väljas på 3 sätt, och medlemmarna från det arbetslaget på $\binom{10}{6}$ sätt, så det blir totalt $3\binom{10}{6} = 630$ möjligheter.

   (b) På $\binom{10}{2}^3 = 91\,125$ sätt.

   (c) Det finns 3 alternativ: Det kan vara 4 medlemmar från ett arbetslag och 1 från vardera av de två övriga, vilket kan ske på $3\binom{10}{4}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$ sätt. Det kan vara 3 medlemmar från ett arbetslag, 2 från ett annat, och 1 från det tredje, vilket kan ske på $3\binom{10}{3}2\binom{10}{2}\binom{10}{1}$ sätt. Slutligen kan det vara två från vardera arbetslag, som i uppgift (b).

   Totalt får vi $300\binom{10}{4} + 60\binom{10}{3}\binom{10}{2} + \binom{10}{2}^3 = 478\,125$ sätt.

   Anmärkning: Ett inklusion-exklusion-resonemang ger formeln $\binom{30}{6} - 3\binom{20}{6} + 3\binom{10}{6}$.

5. Löser vi ekvationssystemet med planets ekvationer får vi att L_2 ges av $(x, y, z) = (3, 2, 0) + s(1, 2, 1)$, för $s \in \mathbb{R}$. Alltså är $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ en riktningsvektor för L_1 och $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$ en riktningsvektor för L_2. Dessa är inte parallella, så linjerna är skärande eller skeva.

   Vi söker nu punkter $P = (2+t, 2, 3+t) \in L_1$ och $Q = (3+s, 2+2s, s) \in L_2$ som minimerar avståndet. Detta inträffar då $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot linjernas riktningsvektorer. Eftersom $\overrightarrow{PQ} = (1 + s - t, 2s, s - 3 - t)$ får vi

$$\begin{cases} 0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_1 = -2 + 2s - 2t \\ 0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_2 = -2 + 6s - 2t, \end{cases}$$

   som ger att $s = 0$ och $t = -1$. Därmed är de två närmaste punkterna $P = (1, 2, 2)$ resp. $Q = (3, 2, 0)$. Eftersom linjerna därmed inte skär varandra är de alltså skeva.

6. Basbytesmatrisen $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. En direkt uträkning ger att $Q^T Q = E$ så Q är ortogonal. Vidare får vi att

$$\det(Q) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

   så basen är positivt orienterad. Avbildningsmatrisen i den nya basen är

$$A' = Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Avbildningen är därmed rotation 90° runt z'-axeln, dvs rotation 90° runt linjen genom origo med riktningsvektor $(1, 0, -1)$.