

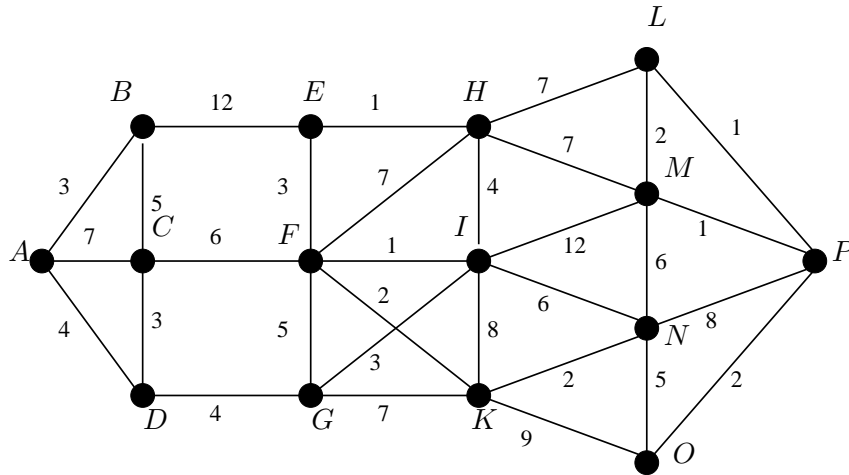
*By request, there is an English summary of the questions at the end of the text. However, if there should be any difference in meaning between the Swedish and the English text, you should follow the meaning of the Swedish text.*

*Fullständiga lösningar krävs, där ej annat anges. (Wherever the converse is not explicitly stated, complete solutions are demanded.)*

*Hjälpmedel: Endast sedvanliga skriv- och ritverktyg. (You are **not** allowed to use calculators, et cetera.)*

- Vi har 7 bollar och 3 lådor. Besvara vardera av följande frågor med ett (explicit uträknat) heltal. På hur många sätt kan vi lägga bollarna i lådorna, om:
  - Bollarna är lika och lådorna är lika? 1 p
  - Bollarna är lika och lådorna är olika? 1 p
  - Bollarna är olika och lådorna är lika? 1 p
  - Bollarna är olika och lådorna är olika? 1 p
- Definiera följderna  $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$  genom att låta  $a_n$  vara antalet strängar av längd  $n$  av tecken **a**, **b**, **c**, **d**, sådana att inget **a** eller **b** följer direkt efter ett **c** eller ett **d**, för  $n \geq 1$ ; och låta  $a_0 = 1$  (motsvarande "den tomma strängen"). Ge ett enkelt uttryck (på "sluten form") för  $a_n$ , och bestäm den genererande funktionen för följderna. (*Ledning*: Ett sätt är att börja med att bestämma ett rekursivt uttryck för  $a_n$ ; men det finns också andra goda sätt.) 5 p
- Ange för varje  $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$  antalet ord av längd  $k$  som man kan bilda av bokstäverna till ordet **BANANER**. 5 p
- Bestäm antalet permutationer  $\sigma$  av  $\{1, \dots, 6\}$ , som uppfyller att för varje  $i \in \{1, \dots, 6\}$  är  $\sigma(i) \neq i$  och  $\sigma(i) \neq i + 1$ . 5 p
- Låt för varje  $n \geq 2$  grafen  $G_n = (V_n, E_n)$ , där  $V_n = \{\text{icketomma delmängder av } \{1, \dots, n\}\} = \{A \subseteq \{1, \dots, n\} : A \neq \emptyset\}$ , och två delmängder bildar en kant om deras skärning innehåller (precis) ett udda antal element:  $E_n = \{\{A, B\} \subseteq V_n : A \neq B \wedge |A \cap B| \equiv 1 \pmod{2}\}$ .
  - Rita upp  $G_2$ ,  $G_3$  och  $G_4$ . 1 p
  - Visa att alla  $G_n$  är sammanhängande. 1 p
  - Avgör för vilka  $n$  (om några) som  $G_n$  har en Eulerpromenad. 3 p
  - Avgör för vilka  $n$  (om några) som  $G_n$  är bipartit. 3 p
- Ange ett minimalt (upp)spännande träd för den kantviktade grafen som ges i *Figur 1* nedan. (Endast svar behöver anges.) 3 p
  - Ange en kortaste stig från  $A$  till  $P$ . (Endast svar behöver anges.) 3 p

Figure 1:



- c) Förklara noggrant vad som menas med en kortaste stig, och varför den stig du angav i b) är sådan. 2p

**A brief English summary.**

1. Calculate the numbers of ways to place 7 balls in 3 boxes, in case of a) equal balls and boxes, b) equal balls but unequal boxes, c) equal balls but equal boxes, d) unequal balls and boxes. In either case, the answer should be explicitly calculated.
2. Give a closed expression for  $a_n$ ; and a generating function for the whole sequence.
3. For each  $k$ , find the number of words of length  $k$  you may form out of the letters in the word **BANANER**.
4. Find the number of permutations  $\sigma$  of  $\{1, \dots, 6\}$ , such that  $i \neq \sigma(i) \neq i + 1$  for  $1 \leq i \leq 6$ .
5. For  $n = 2, 3, 4, \dots$ , let  $G_n$  be the graph with non-empty subsets of  $\{1, \dots, n\}$  for vertices, and 2-sets of such subsets, such that their intersection contains an odd number of elements, for edges. a) Draw  $G_2, G_3$ , and  $G_4$ . b) Show that all  $G_n$  are connected. c) Decide for which  $n$  (if any) that  $G_n$  possess an Euler walk. d) Decide for which  $n$  (if any) that  $G_n$  is bipartite.
6. For the edge weighted graph of *Figure 1*, give a) a minimal spanning tree, and b) a shortest path from  $A$  to  $P$ . *No motivations are demanded, only answers.* c) Explain carefully the term 'shortest path', and why the path you gave is such.

*Skrivningsåterlämning torsdag den 17/1 kl 12.20-12.40 i cafeterian, hus 5; därefter hos Ylva Brolin, rum 201, under ordinarie kontorstid.*