MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik

Lösningar till tentamen i Kombinatorik pk, den 14 januari 2003

---

1. a) $P(20,8) = \dfrac{20!}{8!}$

b) De övriga $12-3=9$ böcker kan hon välja på $\binom{17}{9}$ sätt och alla tolv kan hon arrangera på 12! sätt. Svaret är därför $12! \cdot \binom{17}{9}$

2. Om $E \subset A$ och $|E| = 5$ så måste S_E uppfylla olikheten $15 = 1+2+3+4+5 \le S_E \le 21+22+23+24+25 = 115$. Summan S_E kan därför anta 101 olika värden. Då $|A| = 9$ så finns det $\binom{9}{5} = 126$ olika fem-element delmängder till A. Enligt lådprincipen måste minst två av dessa delmängder ha samma summa (en av de 101 olika möjligheterna).

3. Låt A_i beteckna mängden av alla arrangemang där paret nummer i sitter intill varandra ($i = 1,2,3,4,5$). Vi tillämpar inklusion-exklusion principen. Det totala antalet placeringar är 9! (en person sätter sig var som helst och permutationer av de övriga nio utgör alla placeringar).
$|A_i| = 2\cdot 8!$: paret i sätter sig och de övriga åtta permuteras på 8! olika sätt. Faktorn 2 tillkommer eftersom paret i kan sitta antingen som MF eller som FM.
Likadant finner vi att $|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot 7!$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^3 \cdot 6!$, osv. ($i$, j och k är olika)
Slutligen $|\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_5| = 9! - \binom{5}{1}2\cdot 8! + \binom{5}{2}2^2\cdot 7! - \binom{5}{3}2^3\cdot 6! + \binom{5}{4}2^4\cdot 5! - \binom{5}{5}2^5\cdot 4!$.

4. a) Den genererande funktionen är $f(x) = (x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^2 = (e^x-1)\frac{e^x-e^{-x}}{2}(e^x)^2 = \frac{1}{2}(e^{4x}-e^{3x}-e^{2x}+e^x)$. Vi söker koefficienten vid $\frac{x^{20}}{20!}$, vilket är $\frac{1}{2}(4^{20}-3^{20}-2^{20}+1)$.
b) Den genererande funktionen är $f(x) = (1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^4 = (e^x-\frac{x^2}{2})^4 = e^{4x} - 4e^{3x}\frac{x^2}{2} + 6e^{2x}\frac{x^4}{4} - 4e^x\frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{16}$. Vi söker koefficienten vid $\frac{x^{20}}{20!}$, vilket är $4^{20} - 2\cdot 3^{18}\cdot 20\cdot 19 + \frac{3}{2}\cdot 2^{16}\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17 - \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15$.

5. Antag $V = V_1 \cup V_2$ är hörnen i $K_{3,7}$, där $|V_1| = 3$ och $|V_2| = 7$.
a) Varje stig måste påbörjas eller avslutas i V_1, och alla hörn i V_1 måste användas. Om vi då säger att vi börjar i ett hörn i V_1 så finns det $3\cdot 7\cdot 2\cdot 6\cdot 1\cdot 5 = 1260$ stigar.
b) Det finns $\dfrac{3\cdot 7\cdot 2\cdot 6\cdot 1}{2}$ stigar som börjar och slutar i V_1 samt $\dfrac{7\cdot 3\cdot 6\cdot 2\cdot 5}{2}$ stigar som börjar och slutar i V_2. Sammanlagt finns det $126 + 630 = 756$ stigar.

6. Antag (x,y) inte är en kant i $\bar{G}$. Eftersom $\deg_G(x) = \deg_G(y) = n$ så är $\deg_{\bar{G}}(x) = \deg_{\bar{G}}(y) = |V|-1-n$. Följaktligen $\deg_{\bar{G}}(x) + \deg_{\bar{G}}(y) = 2|V| - 2 - 2n = |V| + (|V| - 2 - 2n) \ge |V|$, eftersom, enligt förutsättningar $|V| \ge 2n+2$. Enligt Diracs sats $\bar{G}$ är hamiltonsk.

Paul