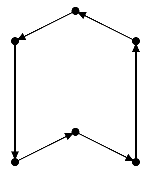
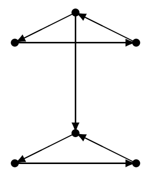
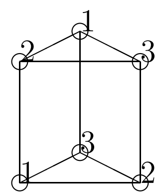
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Jan Snellman

LÖSNINGAR TILL RESTTENTAMEN KOMBINATORIK PK 2003-06-05

1. Det finns en Hamiltoncykel, se figur.
Eftersom G har 6 noder med grad (valens) 3, så finns ingen Eulerväg. Om man tar bort en båge från G, har man 2 noder med grad 2 och 4 med grad 3, så det finns fortfarande ingen Eulerväg. Men man kan bort 2 bågar så att grafen förblir sammanhängande, 4 noder har grad 2, och 2 noder har grad 3, och då finns det en Eulerväg (se figur). Så det finns en enkel öppen väg av längd 7, men ingen av längd 8 eller längd 9.
Det kromatiska talet är ≥ 3, då G har en delgraf isomorf med K_3. Eftersom G kan färgläggas med 3 färger (se figur) så är det kromatiska talet precis 3.







2. G är en cykelfri graf med 5 sammanhängande komponenter, så G är den disjunkta unionen av 5 träd G_1, G_2,G_3, G_4, G_5. Eftersom $16 > 3 \cdot 5$ ger duvslagsprincipen att något G_i innehåller ≥ 4 noder. Eftersom G_i är ett träd så $|B(G_i)| = |N(G_i)| - 1 \geq 4 - 1 = 3$.

3. (a) Det finns $3!\binom{5}{3} = 60$ ord bestående av 3 olika bokstäver, och $3{\cdot}4{\cdot}3 = 36$ olika ord där två bokstäver är lika, eftersom dubbelbokstaven (E, N, eller T) kan väljas på 3 olika sätt, och den ensamma bokstaven på 4 olika sätt, och positionen för den ensamma bokstaven på 3 sätt. Totalt finns det alltså $60 + 36 = 96$ olika ord av längd 3.

   (b) Det finns $\binom{5}{3} = 10$ olika strikt ordnade ord av längd 3, eftersom ett sådant ord är unikt bestämt av de ingående bokstäverna, som måste vara olika. Det finns alltså $96 - 10 = 86$ olika icke strikt ordnade ord.

   (c) För att räkna ord med fyra bokstäver söker vi koefficienten för $\frac{t^4}{4!}$ i

$$(1+t)^2(1+t+\frac{t^2}{2})^3 = (1+2t+t^2)(1+3t+9/2t^2+4t^3+9/4t^4+3/4t^5+1/8t^6)$$

   Den är

$$4!\left(1 \times \frac{9}{4} + 2 \times 4 + 1 \times \frac{9}{2}\right) = 4! \times \frac{59}{4} = 354.$$

(d) För att räkna ord med fyra bokstäver utan upprepade bokstäver söker vi koefficienten för $\frac{t^4}{4!}$ i $(1+t)^5$. Den koefficienten är $4!\binom{5}{4} = 5! = 120$. Det finns alltså $354 - 120 = 234$ ord med någon upprepad bokstav.

4. $n!S_1(m,n)$ räknar antalet sätt att placera m numrerade bollar i n numrerade lådor, så att inget låda blir tom. Det är samma sak som att räkna antalet surjektioner från en m-mängd till en n-mängd, och det antalet ges av

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m,$$

se boken, exempel 8.3. Det följer att

$$S_1(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m.$$

För att placera ut m nummrerade bollar i n onummrerade lådor kan vi först bestämma hur många, k, lådor som skall få någon boll, och sedan placera ut de m bollarna bland precis k lådor. Det senare kan göras på $S_1(m,k)$ olika sätt. Det följer att

$$S_0(m,n) = \sum_{k=0}^{n} S_1(m,k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell\binom{k}{k-\ell}(k-\ell)^m$$

Rekursionsformeln visas i lösningen till uppgift 5.3.17 i boken.