MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Paul Vaderlind

Tentamensskrivning i
KOMBINATORIK fk/pk
5 poäng
den 24 maj 2004 kl 09:00–14:00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För full poäng krävs fullständiga motiveringar. 12 poäng ger säkert godkänd. Observera att uppgifterna *inte* är ordnade efter svårighetsgraden.

---

1. På hur många olika sätt kan talet 56 skrivas som en summa av 3:or och 5:or om
(a) Ingen hänsyn tas till termernas ordning, (1p)
(b) Man tar hänsyn till termernas ordning. (2p)

2. Visa, gärna med en kombinatorisk argument, att $m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k! S(n,k)$, där $m, n \in Z^+$ och $S(n,k)$ betecknar Stirling talen av andra slag. (4p)
(Ledtråd: m^n räknar antalet funktioner från en n-mängd till en m-mängd.)

3. På hur många sätt kan fyra par placeras runt ett cirkulärt bord så att inget par placeras på två stolar intill varandra? Två utplaceringar anses vara identiska om den ena fås genom att rotera den andra runt bordet. (4p)
(Ledtråd: Ett sätt att lösa uppgiften är genom att använda inklusion-exklusion principen.)

4. Lös rekurrensrelationen $x_{n+3} - 5x_{n+2} + 8x_{n+1} - 4x_n = 2^{n+3}$ för $n \geq 0$ med villkoren $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$. (4p)

5. Låt G vara en planär, sammanhängande enkel graf (utan loopar och parallella kanter) med 8 hörn och 13 kanter. Visa att $\chi(G) \geq 3$. (4p)
(Ledtråd: Kommer du ihåg Eulers relation för planära grafer? Visa att någon region begränsas av tre kanter.)

6. Låt G vara en turnering på n hörn (en turnering är en komplett riktad graf). Visa att $\sum_{v \in V(G)} \big(deg_+(v)\big)^2 = \sum_{v \in V(G)} \big(deg_-(v)\big)^2$, där $deg_+(v)$ och $deg_-(v)$ betecknar ut- respektive ingraden av hörnet v. (4p)
(Ledtråd: Vad kan man säga om summan $deg_+(v) + deg_-(v)$ för ett hörn v i turneringen?)

LYCKA TILL!

Skrivningsåterlämning: onsdag den 2 juni, kl 12:00 i kafferummet, hus 5 och därefter hos Tom Wollecki, rum 208, hus 6.