

Inga hjälpmedel tillåtna. 11 p (av 23 p) ger säkert godkänt. Notation:  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $S_n$  betecknar permutationer på  $[n]$ .

- Låt  $G$  vara följande viktade oriktade graf. Bestäm alla
1. uppspännande träd av minimal vikt. Hur många är de?  
 Vad är den minimala vikten?

	1	1	1	1	
2		2	2	2	2
	1	1	1	1	
2		2	2	2	2
	1	1	1	1	
2		2	2	2	2
	1	1	1	1	

4 p

2. Rikta kanterna i grafen ovan nedåt och åt höger, låt övre vänstra hörnet vara källa och nedre högra hörnet vara sänka. Vad är det maximala flödet i det resulterande nätverket?  
 Ge ett maximalt flöde och ett minimalt snitt. Är dessa unika? 4 p
3. Bestäm antalet permutationer i  $S_n$  med precis 2 fixpunkter. 4 p
4. Ge genererande funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

där  $c_n$  är antalet heltalslösningar till

$$2x + 4y = n, \quad x, y \geq 0.$$

Ge ett explicit uttryck för  $c_n$ . 4 p

5. Bestäm  $x_n$  då  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ , samt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n - y_n \\ y_{n+1} &= -x_n + y_n \end{aligned}$$

4 p

6. Följande problem är från *Ad Acuendos Juvenes* av Alcuin från York (735-804).

XVII. PROPOSITIO DE TRIBUS FRATRIBUS SINGULAS HABENTIBUS SORORES. Tres fratres erant, qui singulas sorores habebant, et fluvium transire debebant. (Erat enim unicuique illorum concupiscentia in sorore proximi sui) qui venientes ad fluvium non invenerunt, nisi parvam naviculam, in qua non potuerunt amplius nisi duo ex illis transire. Dicat, qui potest, qualiter fluvium transierunt, ne una quidem earum ex ipsis maculata sit?

Engelsk översättning:

There were three men, each having an unmarried sister, who needed to cross a river. Each man was desirous of his friend's sister. Coming to the river, they found only a small boat in which only two persons could cross at a time. Let him say, he who is able, How did they cross the river, so that none of the sisters were defiled by the men?

Lös Alcuins problem<sup>1</sup> (2p) och bestäm också på hur många sätt man kan välja ut en delmängd av de sex personerna och placera dem på ena flodstranden (återstoden på den andra) utan att någon kvinnas heder hotas. (1p).

3p

*Skrivningsåterlämning den 20 december kl 13.00 i rum 34, därefter hos vaktmästaren på expeditionstid.*

---

<sup>1</sup>En senare version av problemet, konstruerad av Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), har istället tre gifta par, där männen är våldsamt svartsjuka. Ännu senare kom en version där istället fruarna var svartsjuka.

I den tentamen som delades ut den 15 december användes den senare versionen. Tydligt har detta (inte av någon skrivande dock) uppfattats som stötande, varför jag av ämnesrådet och prefekten har uppmanats att, i efterhand, ändra problemets lydelse. Lösningen är oreviderad, men fungerar *mutatis mutandis* för Alcuins problem.