MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik

Lösningar till tentamen i Kombinatorik pk, den 22 augusti 2005

---

1. Varje val av fyra siffror ur $\{1, 2, \ldots, 9\}$ (det finns $\binom{9}{4}$ sådana val) leder till exakt ett tal med växande sifferföljd och ett tal med avtagande sifferföljd. Talen med avtagande sifferföljd kan även ha 0 som slutsiffran. De tre första siffrorna kan fås på endast ett sätt som ett val av tre olika siffror ur $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Antalet tal som vi inte är intresserade av är därför $2\binom{9}{4} + \binom{9}{3} = 336$. Eftersom det totala antalet fyrsiffriga tal är $9999 - 999 = 9000$ så är svaret $9000 - 336 = 8664$.

2. Vänsterledet räknar antalet permutationer av en n-mängd. Varje sådan permutation lämnar ett antal k, $0 \le k \le n$, element kvar på sin plats, medan av de återstående $n-k$ hamnar inget på sin plats. Håller vi dessa k element på sin plats, kan de övriga ordnas på d_{n-k} olika sätt. k element som ska ligga på sin plats kan väljas på $\binom{n}{k}$ olika sätt, för alla $0 \le k \le n$. Följaktligen får vi att antalet permutationer av en n-mängd som lämnar precis k element kvar på sin plats är $\binom{n}{k}d_{n-k}$. Därför är $n! = \binom{n}{0}d_n + \binom{n}{1}d_{n-1} + \binom{n}{2}d_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}d_0$. Då $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, så får vi den önskade identiteten.

3. At dela frukterna i två lika stora mängder är samma som att välja femton frukter från korgen. Om då a_{15} betecknar antalet sätt att välja 15 frukter från korgen så är det sökta talet $a_{15}/2$. Den genererande funktionen för antalet sätt att välja n frukter ur korgen är $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5 = (1 - x^7)^5/(1 - x)^5 = (1 - 5x^7 + 10x^{14} - 10x^{21} + 5x^{28} - x^{35}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5-1}{k}x^k$. Koefficienten a_{15} vid x^{15} är $\binom{19}{15} - 5\binom{12}{8} + 10\binom{5}{1}$. Svaret är därför $\left[\binom{19}{4} - 5\binom{12}{4} + 50\right]/2$.

4. (a) Låt oss bestämma x_{k+1}. Om den första bokstaven i ett "tillåtet" ord med längd $k + 1$ är a, b eller c så är det resterande ordet ett "tillåtet" ord av längd k. Det finns x_k sådana ord. Detta ger $3x_k$ möjligheter. Om den första bokstaven är d eller e så är det resterande ordet ett "icke-tillåtet" ord av längd k. Eftersom det finns 5^k ord av längd k totalt så finns bland dessa $5^k - x_k$ otillåtna ord. Detta ger oss $2(5^k - x_k)$ möjligheter. Följaktligen $x_{k+1} = 3x_k + 2(5^k - x_k) = x_k + 2 \cdot 5^k$, samt $x_1 = 2$.
(b) Karakteristiska ekvationen är $r = 1$. Därför $x_n^H = A$. Sätt in $x_n^P = B \cdot 5^n$. Då får vi $B = \frac{1}{2}$. Alltså $x_n = x_n^H + x_n^P = A + \frac{1}{2} \cdot 5^n$. Villkoret $x_1 = 2$ ger $A = -\frac{1}{2}$. Slutligen $x_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)$.

5. $\chi(G) \le 2$ omm G är bipartit. En bipartit graf G_0 med m hörn i den ena färgklassen och $13 - m$ hörn i den andra har som mest $m(13-m)$ kanter. Funktionen $f(x) = 13x - x^2$ har sitt maximun för $x = \dfrac{13}{2}$, därför har G_0 som mest $6 \cdot 7 = 42$ kanter. Följaktligen är G ej bipartit, alltså innehåller en udda krets. Därför $\chi(G) \ge 3$.

6. a) Det finns $2^{|X|} - 1 = 2^n - 1$ icke-tomma delmängder till X alltså finns det $2^n - 1$ hörn i G_n. Hörnet X är förbunden med alla de övriga hörnen i grafen alltså maxvalensen är $2^n - 2$.
b) Från B utgår ingen kant till alla hörn C som är delmängder till $X - B$. Det finns $2^{|X-B|} - 1 = 2^{|X|-|B|} - 1 = 2^{n-k} - 1$ sådana hörn. Således är $deg(B) = (2^n - 2) - (2^{n-k} - 1) = 2^n - 2^{n-k} - 1$. Detta tal är jämnt omm $k = n$, dvs $B = X$. Om $n \ge 3$ så finns det alltså i grafen fler än två hörn med udda valens, dvs ingen Eulerstig. Om $n = 2$, $X = \{a, b\}$, så finns det i G_2 tre hörn: $\{a, b\}$, $\{a\}$ och $\{b\}$ med $deg(\{a, b\}) = 2$ och $deg(\{a\}) = deg(\{b\}) = 1$. I G_2 finns alltså en Eulerstig.
c) För $1 \le k \le n$ finns det i G_n $\binom{n}{k}$ hörn som svarar mot k-delmängderna i X. Ur varje sådant hörn utgår $2^n - 2^{n-k} - 1$ kanter. Följaktligen är antalet kanter lika med $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(2^n - 2^{n-k} - 1) = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^n - 2^{n-k} - 1) + 1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^n - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \frac{1}{2} = 2^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 2^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k -$

$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \frac{1}{2} =$. . . använd nu binomialsatsen . . . $= 2^{n-1} \cdot 2^n - 2^{n-1} \cdot (\frac{3}{2})^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{2} = 2^{2n-1} - 2^{n-1} - \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

Paul