MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Fröberg

Lsnigar till
tentamensskrivning i
Kombinatorik pk
19 december 2005

1. Det finns $\binom{10}{4} = 210$ 4-delmängder till A. Summan av elementen i en 4-delmängd ligger mellan 1+2+3+4=10 och 47+48+49+50=194. Det finns alltså högst 195 olika summor, så minst två måste vara lika.

2. Graden i varje hörn är $\binom{6}{2} = 15$, eftersom det finns 15 2-delmängder till den 6-mängd av tal som inte finns i hörnet. Corollary 11.4 i boken visar att det finns en Hamiltoncykel. Eftersom graden av hörnen är udda, finns ingen Eulerkrets.

3. Jag kallar de kanter som går från navet ekrar. Ett uppspännande träd består av ekrarna. Om tre ekrar ingår i det uppspännande trädet, kan den sista kanten väljas på två sätt. De tre ekrarna kan väljas på fyra sätt. Om två närliggande ekrar ingår, kan man välja två av tre kanter i cykeln godtyckligt (3 sätt). De två ekrarna kan väljas på fyra sätt. Om två motstående ekrar ingår kan återstående kanter väljas på fyra sätt, och ekrarna på två. Om bara en eker ingår finns fyra val av återstående, och ekern kan väljas på fyra sätt. Svar. $1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 45$

4. Totalt finns $\binom{2k+3}{2}$ sätt att placera $2k + 1$ bollar i tre fack. Om fack ett innehåller fler bollar än de andra två tillsamman, dvs minst $k+1$ bollar, är antalet mj̈ligheter $\binom{k+2}{2}$. (Placera först $k + 1$ bollar i fack ett, och sedan återstående k godtyckligt.) Analogt om fack två eller tre har minst $k + 1$ bollar. Det finns alltså $\binom{2k+3}{2} - 3\binom{k+2}{2}$ sätt.

5. Låt $D_n = \det M_n$. Utveckla efter sista raden! $D_n = -\det K_{n-1} + 2D_{n-1}$, där K_{n-1} är en matris med de $n - 2$ första raderna lika med raderna i M_{n-1}, och den sista raden bestående av nollor utom på de två sista platserna som har ettor. Utveckla $\det K_{n-1}$ efter sista kolonnen! $\det K_{n-1} = D_{n-2}$. Vi har alltså $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot 1, så den allmänna lösningen är $an + b$. Nu är $D_1 = 2$ och $D_2 = 3$, så $a = b = 1$. Svar: $D_n = n + 1$

6a) Svar: $a - c, b - d, c - e, c - f, d - g, e - g, e - h, f - i, h - j$. $c - f$ kan bytas ut mot $e - i$.
b) Svar: $a - e - h - j$
c) Svar: Värdet på ett maximalt flöde är 20, och $\{a, b, c, d, e, f, h\} \cup \{g, i, j\}$ är ett minimalt snitt.