MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Fröberg

Lösningar till
tentamensskrivning i
Kombinatorik
19 januari 2006

1. Vi kan anta att inget av talen är delbart med 3 (annars är det ju självklart). Om alla tre talen är lika $\pmod 3$, så är $n_1 + n_2 + n_3$ delbart med 3, så vi kan anta att två av dem har rest 1 och ett rest 2 eller tvärtom. Om n_1 och n_2 har samma rest är $n_2 + n_3$ delbart med 3. Om n_1 och n_3 har samma rest är $n_2 + n_3$ delbart med 3. Om n_2 och n_3 har samma rest är $n_1 + n_2$ delbart med 3.

2. Graden av varje hörn i G är $\binom{4}{2} = 6$, för det finns 6 2-delmängder som är disjunkta med talen i hörnet. I H är då graden av varje hörn $14 - 6 = 8$. Corollary 11.4 i boken visar att det finns en Hamiltoncykel. Eftersom graden är jämn i alla hörn finns en Eulerkrets.

3. Jag kallar kanterna från navet ekrar. Om en eker ingår i stigen finns två möjligheter, och man kan välja ekern på fem sätt. Vi kallar hörnen i cykeln $a - b - c - d - e$ och navet för x. Om den enda ekern som ingår är $x - a$ finns möjligheterna $x - a - b - c - d - e$ och $x - a - e - d - c - b$. Om två närliggande ekrar ingår i stigen finns fyra möjligheter, och man kan välja ekrarna på fem sätt. Om de två ingående ekrarna är $x - a$ och $x - b$, finns $a - x - b - c - d - e$, $e - a - x - b - c - d$, $d - e - a - x - b - c$ och $c - d - e - a - x - b$. Om två icke närliggande ekrar ingår finns två möjligheter och ekrarna kan väljas på fem sätt. Om de två ekrarna är $x - a$ och $x - c$ finns möjligheterna $b - a - x - c - d - e$ och $b - c - x - a - e - d$. Dessa är de enda möjligheterna, så det finns 40 stigar som är uppspännande träd.

4. Om fack ett har fler bollar än de andra två tillsamman, finns det minst $k + 1$ bollar där. Placera ut $k + 1$ bollar i fack ett, och de andra k godtyckligt. Det kan göras på $\binom{k+2}{2}$ sätt. Analogt om fack två eller tre har flest bollar. Svar: $3\binom{k+2}{2}$

5. Kalla antalet godkända strängar av längd n s_n. Det finns s_{n-1} godkända strängar av längd n som slutar på 2, för de $n - 1$ första kan vara vilken godkänd sträng som helst av längd $n - 1$. Om strängen slutar på 0 eller 1, bildar de $n - 1$ första tecknen en icke godkänd sträng. Det finns $3^{n-1} - s_{n-1}$ sådana. Vi får alltså $s_n = s_{n-1} + 2(3^{n-1} - s_{n-1})$. Vi har $s_0 = 1$ (den tomma strängen). Detta ger $\sum_{n\geq 1} s_n X^n = -\sum_{n\geq 1} s_{n-1} X^n + 2\sum_{n\geq 1} 3^{n-1} X^n$. Om vi betecknar den genererande funktionen $\sum_{n\geq 0} s_n X^n$ med $S(X)$ har vi $S(X) - 1 = -XS(X) + 2X/(1-3X)$, så $S(X) = (1-X)/((1-3X)(1+X)) = 1/2(1/(1+X)+1/(1-3X))$. Detta ger $s_n = 1/2((-1)^n + 3^n)$.

6a) Svar: $a - c, b - d, d - g, d - h, e - g, f - i, h - j$ samt vilka två som helst av $c - e$, $c - f$, $e - i$.
b) Svar: $a - e - h - j$
c) Värdet av det maximala flödet är 18. Minimalt snitt $\{a, b, c, d, e, f, h\} \cup \{g, i, j\}$.