MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningar till tentamen i Kombinatorik pk, den 21 augusti 2006

---

1. a) Låt X vara mängden av sådana fördelningar. Det sökta antalet $|X|$ är då antalet sätt att fördela 11 dagar i tre lådor med 5 dagar i den första lådan, 4 dagar i den andra och 2 i den tredje lådan, dvs. $\binom{11}{5,4,2} = \frac{11!}{5! \cdot 4! \cdot 2!} = 6930$.

b) Låt A_1 vara mängden av alla fördelningar i X med de två dykdagarna i rad. Då kan dessa dagar betraktas som en enda lång dag och vi får $|A_1| = \binom{10}{5,4,1} = \frac{10!}{5! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260$. Det sökta antalet fördelningar blir i så fall $|X| - |A_3| = 6930 - 1260 = 5670$.

c) Låt A_2 och A_3 vara mängderna av fördelningar i X med de 5 Kombinatorikdagarna respektive de 4 Algebradagarna i rad. Det sökta antalet är nu då, enligt inklusion-exklusion principen, $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |X| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap |A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. På samma sätt som i uppgiften b) finner vi att $|A_2| = \binom{7}{1,4,2} = 105$, $|A_3| = \binom{8}{5,1,2} = 168$, $|A_1 \cap A_2| = \binom{6}{1,4,1} = 30$, $|A_1 \cap A_3| = \binom{7}{5,1,1} = 42$, $|A_2 \cap A_3| = \binom{4}{1,1,2} = 12$ samt $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{3}{1,1,1} = 6$. Följaktligen är det sökta antalet lika med 6930-(1260+105+168)+(30+42+12)-6=5475.

2. Karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ ger $r = 1$ samt $r = -2$. Härifrån $a_n^h = c + d(-2)^n$. För att finna en partikulär lösning prövar vi $a_n^p = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ (förstagradspolynom kommer ej att funka ty vi har lösningen $r = 1$ till karakteristiska ekvationen). Insättningen i relationen ger $[\alpha(n+2)^2 + \beta(n+2) + \gamma] + [\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma] - 2[\alpha n^2 + \beta n + \gamma] = n + 2$. Identifiering av koefficienterna ger $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{7}{18}$ samt $\gamma = 0$. Därför är $a_n^p = \frac{1}{6}n^2 + \frac{7}{18}n$. Nu är $a_n = a_n^h + a_n^p = c + d(-2)^n + \frac{1}{6}n^2 + \frac{7}{18}n$. Insättning av $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$ ger $c = \frac{4}{27}$ och $d = -\frac{4}{27}$. Slutligen $a_n = \frac{4}{27} - \frac{4}{27}(-2)^n + \frac{1}{6}n^2 + \frac{7}{18}n$.

3. För en planär graf $G = (V, E)$ gäller att $|E| \leq 3|V| - 6$. Å andra sidan $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6|V|$, om gradtalet är minst 6 för varje hörn. Denna olikhet ger $|E| \geq 3|V|$. Således fick vi att $3|V| \leq |E| \leq 3|V| - 6$, vilket är orimligt. Därför måste minst ett av hörnen ha gradtalet mindre än 6.

4. Ett val beskrivs fullständigt av vilka k stycken icke-svarta kulor, $k = 0, 1, 2, ..., n$, som finns med (resten är svarta). Det sökta antalet blir därmed (antalet sätt att välja 0 kulor) + (antalet sätt att välja 1 kula) + . . . + (antalet sätt att välja n kulor) bland $2n + 1$ kulor, dvs $\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + ... + \binom{2n+1}{n}$. Men $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$, så detta antal blir
$$\frac{1}{2}\left(\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + ... + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + ... + \binom{2n+1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}(1+1)^{2n+1} = 2^{2n}.$$

5. a) Den genererande funktionen är $f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^2 = (e^x - 1)\frac{e^x - e^{-x}}{2}(e^x)^2 = \frac{1}{2}(e^{4x} - e^{3x} - e^{2x} + e^x)$. Vi söker koefficienten vid $\frac{x^{20}}{20!}$, vilket är $\frac{1}{2}(4^{20} - 3^{20} - 2^{20} + 1)$.

b) Den genererande funktionen är $f(x) = (1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)^4 = (e^x - \frac{x^2}{2})^4 = e^{4x} - 4e^{3x}\frac{x^2}{2} + 6e^{2x}\frac{x^4}{4} - 4e^x\frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{16}$. Vi söker koefficienten vid $\frac{x^{20}}{20!}$, vilket är $4^{20} - 2 \cdot 3^{18} \cdot 20 \cdot 19 + \frac{3}{2} \cdot 2^{16} \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$.

6. Antag (x, y) inte är en kant i $\bar{G}$. Eftersom $\deg_G(x) = \deg_G(y) = n$ så är $\deg_{\bar{G}}(x) = \deg_{\bar{G}}(y) = |V| - 1 - n$. Följaktligen $\deg_{\bar{G}}(x) + \deg_{\bar{G}}(y) = 2|V| - 2 - 2n = |V| + (|V| - 2 - 2n) \geq |V|$, eftersom, enligt förutsättningar $|V| \geq 2n + 2$. Enligt Diracs sats $\bar{G}$ är hamiltonsk.

Paul