MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jörgen Backelin

Tentamensskrivning i
Kombinatorik pk
2006-12-18

Fullständiga lösningar krävs.

Hjälpmedel: Endast sedvanliga skriv- och ritverktyg.

1. Hur många trebokstavsord på kan man bilda av bokstäverna i ordet **DATATERMINAL**? 5 p

2. Låt G vara den graf man får från den kompletta grafen K_6, genom att man tar bort tre disjunkta kanter. Beräkna det kromatiska polynomet för G, och bestäm även det kromatiska talet för grafen. 5 p

3. På hur många sätt kan jag sätta ut 8 likadana torn på 8 olika *vita* rutor på ett vanligt schackbräde, så att inget torn 'hotar' ett annat? 4 p

4. Ge ett exempel på en graf som är eulersk men inte planär, och ett exempel på en sammanhängande graf som är planär men inte hamiltonsk. 4 p

5. Föreställ dig följande situation: Vi håller på att försöka bestämma den genererande funktionen för antalen element i vissa mängder M_1, M_2, M_3,... av isomorfiklasser av grafer med mycket speciella egenskaper. Vi har satt $a_i = |M_n|$ för $n \in \mathbf{Z}_+$, och har med mycken möda och stort besvär lyckats räkna ut att $a_1 = 3$, $a_2 = 25$, $a_3 = 66$ och $a_4 = 123$. Det verkar nästan ogörligt att beräkna a_5, a_6, o. s. v. (åtminstone innan institutionen har skaffat ännu starkare datorer). Vi har dock goda skäl att misstänka att följden $(a_1, a_2, \ldots)$ uppfyller en homogen lineär andra ordningens rekurrensrelation, d. v. s. att $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, för $n \geq 3$.

   a) Bestäm konstanterna α och β, och den genererande funktionen för följden (under antagandena ovan). 2 p

   b) Bestäm ett uttryck för a_n "på sluten form", d. v. s. som en explicit funktion av n. 2 p

   c) Finns det någon viktig kommentar att tillägga, t. ex. om någon svaghet i resonemangen vi har fört? 2 p

6. Denna uppgift går ut på att ge den kombinatoriska delen av ett bevis för följande talteoretiska sats: *Om p är ett primtal och $p \equiv 1 \pmod 4$, så finns två positiva heltal k och ℓ, sådana att*

$$k^2 + \ell^2 = p\,.$$

   (Till exempel är $5 = 1^2 + 2^2$, $53 = 7^2 + 2^2$ och $61 = 5^2 + 6^2$.) Hela beviset inleds med att man med algebraiska metoder visar att det finns något naturligt tal a med $0 < a < p$, sådant att (1) $a^2 \equiv -1 \pmod p$. Beviset för (1) är inte särskilt svårt, men faller utanför denna kurs; (1) **antas därför redan vara känt**.

   Ledning: Idén är att visa att det finns naturliga tal k och ℓ, sådana att $0 < k^2 + \ell^2 < 2p$, samtidigt som $k^2 + \ell^2 \equiv 0 \pmod p$. Använd nu *dels* att om $i = 0, 1, 2, \ldots$ och a_i är den principala resten vid division av ia med p, så är $a_i^2 + i^2 \equiv 0 \pmod p$ (**varför?**), och *dels* att om n är heltalsdelen av $\sqrt{p}$, så att $n^2 \leq p < (n+1)^2$, så är antingen $n^2 + 1 < p < n^2 + 2n$, eller så är vi klara (**varför?**). 4 p

Skrivningsåterlämning torsdag den 21/12 kl 14.10-14.30 i mitt arbetsrum, rum 408 i hus 6; därefter hos Tom Wollecki, rum 208, under ordinarie kontorstid.