Lösningar till tentamensskrivning i Kombinatorik pk 2007-01-18

1. a) Svar: $\underline{9}$. (Antalet heltalsartitioner av 6 i 4 parter; vilket för så små värden lättare fastställs medelst enumeration än med hjälp av genererande formella potensserier:

$$6,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3+3,\ 3+2+1,\ 3+1+1+1,\ 2+2+2,\ 2+2+1+1\,.)$$

   b) Svar: $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \underline{84}$. (Oordnat urval med upprepning av 6 lådor ur 4.)

   c) Svar: $1+31+90+65 = \underline{187}$. (Antalet partitioner av en 6-mängd i högst 4 parter; addera Stirlingtal.)

   d) Svar: $4^6 = \underline{4096}$. (Ordnat urval med upprepning av 6 lådor ur 4.)

2. Ordet **TENTAMENSVAKT** innehåller 3**T**, 2 vardera av **A**, **E** och **N**, samt 1 vardera av övriga fyra bokstäver. Den exponentiella genererande formella potensserien som ger koefficienterna för samtliga antal av delord av given längd är alltså
$$(1+x)^4\ (1+x+\tfrac{1}{2}x^2)^3\ (1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3)\ ,$$
vilket har x^3-koefficienten $70\frac{1}{6} = \frac{421}{6}$. Svar: $\underline{421}$.
Det går också utmärkt och i detta fall förmodligen fortare att dela upp orden i **TTT**, ord med precis två bokstäver lika, och ord med alla bokstäver olika, och summera antalen: $1+3\cdot4\cdot7+8\cdot7\cdot6 = 1+84+336 = 421$.

3. Det finns nio ensiffriga positiva heltal (nämligen 1, 2,. . . , 9), så enligt lådprincipen måste det finnas något ensiffrigt tal m sådant att $p(x) = m$ för minst 12 olika värden på x. Eftersom $p(x)$ inte är konstant, så är inte polynomet $p(x) - m$ nollpolynomet; men $p(x) - m$ har minst 12 olika nollställen. Alltså har $p(x) - m$ grad minst 12, och alltså gäller detsamma $p(x)$.

4. Detta kan lösas genom att man först räknar ut den genererande funktionen och sedan härleder det slutna uttrycket, eller tvärtom. Jag väljer det senare denna gång; men börjar av bekvämlighetsskäl ändå med den genererande funktionens nämnare.
Från rekursionsformelns omskrivning $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1 + 2^{n-1}$ ser vi att nämnaren dels innehåller faktorn $1-3x+2x^2$, dels faktorerna $1-x$ och $1-2x$. Detta betyder att såväl 1 som 2 förekommer "dubbelt" som baser i den slutna formen, d. v. s. att denna har utseendet
$$a_n = \alpha + \beta n + \gamma\cdot 2^n + \delta n\cdot 2^n$$
för fyra konstanter α, β, γ och δ. För att bestämma dessa behöver vi fyra ekvationer, och därför värdet a_n för fyra värden på n. Rekursionsformeln ger $a_2 = 3\cdot1 - 2\cdot0 + 1 + 2^{2-1} = 6$ och $a_3 = 3\cdot6 - 2\cdot1 + 1 + 2^{3-1} = 21$; så $n = 0, 1, 2, 3$ ger oss ekvationssystemet
$$\begin{cases} \alpha & & + & \gamma & & & = & 0\\ \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & + & 2\delta & = & 1\\ \alpha & + & 2\beta & + & 4\gamma & + & 8\delta & = & 6\\ \alpha & + & 3\beta & + & 8\gamma & + & 24\delta & = & 21\end{cases}$$
vilket har den entydiga lösningen $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = -1$ och $\delta = 1$. Detta ger ett enkelt uttryck $a_n = \underline{(2^n-1)n}$, samt den genererande funktionen
$$\sum_n a_n x^n = \sum_n n(2x)^n - \sum_n nx^n = \frac{2x}{(1-2x)^2} - \frac{x}{(1-x)^2} = \underline{\frac{x-2x^3}{1-6x+13x^2-12x^3+4x^4}}\ .$$

(*V.G.V.*)

5. Endast fantasin (och möjlighen hur väl du förstår begreppen) begränsar dina svarsmöjligheter. Det finns oändligt många korrekta svar på uppgiften, och jag räknar inte upp dem.

6. a) *Bilderna utgår av datatekniska skäl i denna version.*

   b) Hörnet $\{1, \ldots, n\}$ har en kant till varje annat hörn.

   c) Det totala antalet delmängder till $\{1, \ldots, n\}$ är ju 2^n (eftersom jag för vart och ett av talen $1, \ldots, n$ kan välja att ta med eller inte ta med elementet i delmängden). V_n består av alla dessa delmängder utom $\emptyset$, d. v. s. av $2^n - 1$ element.
   Varje kant utgörs av en delmängd $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ och en icketom äkta delmängd $A \subset B$. Man kan tänka sig varje sådan uppsättning som ett val av hur man har lagt n numrerade bollar i tre lådor märkta "A", "$B \setminus A$" respektive "$\{1, \ldots, n\} \setminus B$", på ett sådant sätt att de två första lådorna inte är tomma.
   Det finns totalt 3^n sätt att lägga bollarna i de tre lådorna; i 2^n av dessa är dock A-lådan tom, och i 2^n av dem är $(B \setminus A)$-lådan tom. Vidare är båda tomma endast i fallet att alla bollar läggs i tredje lådan. Enligt principen om inklusion-exklusion är alltså antalet sätt att lägga bollarna med de två första lådorna icketomma mycket riktigt

$$3^n - (2^n + 2^n) + 1 = 3^n - 2^{n+1} + 1\,, \quad \text{V. S. B.}$$

   d) Om $v \in V_n$ är en mängd med m element, så har m precis $2^m - 2$ kanter till delmängder till v och $2^{n-m} - 1$ kanter till övermängder till v. alltså har alla hörn utom $\{1, \ldots, n\}$ udda grad (valens). För att G_n skall ha en Eulerpromenad krävs dock att det inte finns fler än två udda hörn. Alltså kan endast G_2 ha en Eulerpromenad; och eftersom å andra sidan G_2 är sammanhängande enligt b), blir svaret: <u>endast för $n = 2$</u>.

   e) Att G_2 och G_3 är planära visas bäst grafiskt. G_4 har $2^4 - 1 = 15$ hörn men $3^4 - 2^5 + 1 = 50 > 3 \cdot 15$ kanter, och kan alltså inte vara planär; och G_4 är delgraf av varje G_n med $n > 4$. Svaret blir alltså: <u>endast för $n = 2$ och för $n = 3$</u>.

7. a) Stigen $BADGIFKNOPL$ bildar tillsammans med de extra kanterna DC, FE, EH och PM ett minimalt uppspännande träd.

   b) Korrekt svar innebär att man angivit precis en av följande stigar: $ADGIFKNOP$, $ADGIFKNMP$, $ADGIHMP$ eller $ADGIHLP$.