MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
Linjär analys,pk
torsdagen den 16 januari 2003
kl.9.00–14.00

Skrivningen består av 6 tal. 12 poäng ger säkert godkänt.

(1) Låt $f(x) = \sin x$ vara definierad på $0 < x < \pi$, och $F(x) = |\sin x|$, $|x| < \pi$.
  (a) Bestäm Fourierkosinusserien för $f(x)$. (2p)
  (b) Bestäm Fourierserien för $F(x)$. (2p)
  (c) Besräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$. Motivera! (1p)

(2) Finn lösningen till randvärdesproblemet:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (0 < x < \pi, t > 0)\\
&u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \quad (t > 0)\\
&u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \quad (0 < x < \pi)
\end{aligned}
$$

där f och g är är tillräckligt snälla funktioner på $0 < x < \pi$. Bestäm vidare den slutna formen av lösningen. (4p)

(3) Betrakta följande Sturm-Liouvillesproblem

$$
\begin{aligned}
&(xX')' + \frac{\lambda}{x} X = 0, \quad (1 < x < b)\\
&X(1) = X(b) = 0.
\end{aligned}
$$

  (a) Bestäm egenvärden och egenfunktioner. (2p)
  (b) Visa direkt att de egenfunktioner du har räknat fram är ortogonala på intervallet $1 < x < b$ med viktfunktion $p(x) = \frac{1}{x}$. (2p)

(4) Visa att

$$
\int_0^\infty e^{-\alpha^2 a} \cos \alpha b \, d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \quad (a > 0).
$$

Motivera dina beräkningar. Integralen $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ kan användas utan bevis. (3p)

(5) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t), \quad (x > 0, t > 0)\\
&u(0,t) = 0, \quad (t > 0)\\
&u(x,0) = 1, \quad (x > 0)
\end{aligned}
$$

och $|u(x,t)| < M$ för någon positiv konstant M. (4p)

(6) Antag att funktionen $f(x)$ med egenskapen $f(\pi) = f(-\pi)$ är kontinuerlig på $-\pi \le x \le \pi$ och f' är styckviskontinuerlig på $-\pi < x < \pi$. Låt a_n, b_n vara Fourierkoefficenter till f:

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.
$$

Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ konvergerar. (4p)

Skrivningsåterlämning äger rum i rum 403, Hus 6 måndagen den 20 januari 2003 kl 11.30-12.00 därefter hos Ylva Brolin.