Lösningsförslag till linjär analys den 16/1 2003

Referensen är kursboken, Brown-Churchill, Fourier series and boundary value problems.

1. Se Example på s.67 och Example 2 på s.76 samt Example 2 på s.94 för argument om $\sin x$ är lika med Fourierkosinusserien till $\sin x$ då $0 \leq x \leq \pi$. Så vi kan sätta in $x = 0$ i likheten och sedan får vi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

2. Se t ex s.143-145, där $a = 1$, $c = \pi$.

3. Variabelsubstitutionen $x = \exp s$ ger

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2X}{ds^2} + \lambda X = 0 \quad (0 < s < \ln b) \\
&X(s) = 0 \quad \text{då } s = 0 \text{ och } s = \ln b.
\end{aligned}$$

Genom att lösa detta randvillkorsproblem (se s.49) och att byta variabeln tillbaka får vi egenvärdena och egenfunktionerna till det ursprungliga problemet:

$$\lambda_n = \alpha_n^2, \quad X_n(x) = \sin(\alpha_n \ln x)$$

där $\alpha_n = \frac{n\pi}{\ln b}$.
Variabelsubstitutionen $s = \frac{\pi}{\ln b} \ln x$ i integralen $(m \neq n)$

$$\int_1^{\ln b} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln b} \ln x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\ln b} \ln x\right) dx = \int_0^{\pi} \frac{\ln b}{\pi} \sin(ns) \sin(ms) ds = 0$$

visar ortogonalitet av egenfunktionerna.

4. Låt $y(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a} \cos \alpha x d\alpha$. Eftersom integralen i högledet är absolut konvergent kan vi derivera $y(x)$ med avseende på x. Så

$$y'(x) = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 a} \alpha \sin \alpha x d\alpha.$$

Partiell integrera integralen ovan ger

$$y'(x) = -\frac{x}{2a}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 a}\cos \alpha x d\alpha = -\frac{xy(x)}{2a}$$

vilket ger differentialekvationen $2ay'(x) = -xy(x)$ med stratvillkoret $y(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 a} d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, ty

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 a} d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha^2}\frac{d\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Lösningen till ekvationen är

$$y(x) = Ke^{-\frac{x^2}{4a}}$$

där K är en konstant och bestäms av värdet på $y(0)$, vilket leder till

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right)$$

Det önskade resultatet fås av insättning av $x = b$.

5. Se t ex s.221-223 då $f(x) = u_0 = 1$.

6. Se Lemma på s.105.