MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Torsten Ekedahl

Lösningar till tentamensskrivning i
Linjär analys, pk, 5p
den 16 december 2003

1. a) Vi har att $\cosh(x)$ är en jämn funktion så att sinustermerna i Fourierserien försvinner. För kosinustermerna så ska vi beräkna

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\cos(nx)\,dx.$$

Två partialintegrationer ger

$$a_n = \frac{1}{\pi}[\sinh(x)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(x)\sin(nx)\,dx =$$
$$\frac{2\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} + \frac{n}{\pi}[\cosh(x)\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - n^2 a_n = \frac{2\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi} - n^2 a_n$$

vilket ger

$$a_n = \frac{2\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi(n^2+1)}$$

och därmed Fourierserien

$$\cosh(x) \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\cos(nx).$$

b) Funktionen $f(x) = \cosh(x)$ är styckvis differentierbar på intervallet $[-\pi, \pi]$ så dess värde i ändpunkten π är $(f(-\pi+) + f(\pi-))/2$ dvs $\cosh(\pi)$.

2. Vi börjar med att leta efter en separerad lösning $u(x,t) = X(x)T(t)$ till ekvationen och de homogena randvillkoren vilket ger

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0,\ |X(x)| < M \\ T'(t) = \lambda T(t) \end{cases}$$

För X får vi den allmänna lösningen $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ om $\lambda \neq 0$ och $\mu^2 = \lambda$ och $X(x) = Ax + B$ om $\lambda = 0$. Om vi sätter in $X(0) = 0$ så får vi $C_2 = -C_1$ resp. $B = 0$ och kravet att X ska vara begränsad medför att $A = 0$ och att $\lambda < 0$. Detta ger endast lösningarna $X_\alpha(x) = \sin(\alpha x)$ (med $\alpha^2 = -\lambda$ och $\alpha > 0$). Om vi löser ut T får vi $T_\alpha(t) = e^{-\alpha^2 t}$ vilket ger att den allmänna lösningen är

$$u(x,t) = \int_0^\infty B(\alpha)\sin(\alpha x)e^{-\alpha^2 t}\,d\alpha$$

och det sista randvillkoret ger

$$e^{-2x} = \int_0^\infty B(\alpha)\sin(\alpha x)\,d\alpha.$$

Enligt inversionsformeln för sinustransformen uppfylls detta villkor genom att sätta

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x}\sin(\alpha x)\,d\alpha = \frac{\alpha}{\pi(4+\alpha^2)}$$

så att lösningen får formen

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{\alpha\sin(\alpha x)e^{-\alpha^2 t}}{\pi(4+\alpha^2)}\,d\alpha.$$

3. a) Vi har

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}e^{-ixy}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{x}e^{-ixy}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}e^{-ixy}\,dx =$$
$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}e^{-ixy}\,dx - \int_{0}^{\infty} xe^{-x}e^{ixy}\,dx = g_+(y) - g_+(-y)$$

där $g_+(y) := \int_0^\infty xe^{-x}e^{-ixy}$ som räknas ut genom partialintegration och integration till att bli

$$g_+(y) = \frac{1}{(1+iy)^2}$$

vilket ger

$$g(y) = \frac{1}{(1+iy)^2} - \frac{1}{(1-iy)^2} = -\frac{4iy}{(y^2+1)^2}$$

b) Fouriers inversionsformel och första delen ger

$$xe^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{4iy}{(y^2+1)^2}e^{ixy}\,dy$$

vilket ger

$$-\frac{\pi}{2}ixe^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{y}{(y^2+1)^2}e^{-ixy}\,dy.$$

4. Vi subtraherar från u den stationära lösningen till värmeledningsekvationen som löser randvärdesvillkoren för $x = 0$ och $x = \pi$ dvs x/π och får U som är en lösning med randvärdesvillkoren $U(0,t) = U(\pi,t) = 0$ och $U(x,0) = x - x/\pi = (1-1/\pi)x$. Denna löses genom att ansätta

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

vilket ger villkoret $(1-1/\pi)x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ vilket uppfylls genom att sätta

$$a_n = \frac{2(1-1/\pi)}{\pi}\int_0 \pi x\sin(nx)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}(1-1/\pi)}{n}$$

så att

$$u(x,t) = \frac{x}{\pi} + \left(1-\frac{1}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

5. Se boken.

6. Vi ansätter $y = e^{\alpha x}$ vilket ger ekvationen $\alpha^2 + 2\alpha + \lambda = 0$ dvs

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

och därmed den allmänna lösningen $y(x) = C_1 e^{(\alpha_1)x} + C_2 e^{(\alpha_2)x}$ och randvillkoren ger $C_1 + C_2 = 0$ och $(C_1\alpha_1 e^{\alpha_1\pi} + C_2\alpha_2 e^{\alpha_2\pi}) = 0$ vilket ger $C_2 = -C_1$ och $\alpha_1 e^{\alpha_1\pi} = \alpha_2 e^{\alpha_2\pi}$. Det sistnämnda ger

$$-\frac{\sqrt{1-\lambda}+1}{\sqrt{1-\lambda}-1} = e^{2\sqrt{1-\lambda}}$$

och en lösning till denna ekvation ger lösningarna $C_1 e^{-x}\sin\sqrt{1-\lambda}x$ om $\lambda < 1$, $C_1 xe^{-x}$ om $\lambda = 1$ och $C_1 \sinh\sqrt{\lambda-1}x$ om $\lambda > 1$.