MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Torsten Ekedahl

Lösningar till tentamensskrivning i
Linjär analys, pk, 5p
den 15 januari 2004

1. a) Vi har för $n \neq 0$, eftersom $|x|$ är en jämn funktion, att

$$a_n = \int_{-1}^{1} |x| \cos(n\pi x)\, dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\, dx = \tfrac{2}{\pi n}[x\sin(n\pi x)]_0^1 - \tfrac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx = \tfrac{2}{\pi^2 n^2}[\cos(n\pi x)]_0^1 = 2\tfrac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

och, återigen då $|x|$ är jämna så har vi att $b_n = 0$ och vi ser direct att $a_0 = 1$ så att Fourierserien är

$$|x| \sim 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)\pi x).$$

b) Då $|x|$ är styckvis kontinuerligt deriverbar och kontinuerlig i 0 så säger satsen om konvergens av Fourierserier att dess värde är $|0| = 0$.

2. Vi börjar med att leta efter en separerad lösning $u(x,t) = X(x)T(t)$ till ekvationen och de homogena randvillkoren vilket ger

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ |X(x)| < M \\ T'(t) = \lambda T(t) \end{cases}$$

För X får vi den allmänna lösningen $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ om $\lambda \neq 0$ och $\mu^2 = \lambda$ och $X(x) = Ax + B$ om $\lambda = 0$. Villkoret att detta ska vara en begränsad lösning ger att μ måste vara rent imaginär (dvs att $\lambda < 0$) vilket ger den allmänna lösningen $X(x) = e^{i\alpha x}$ för $\alpha^2 = -\lambda$. Om vi löser ut T får vi $T_\alpha(t) = e^{-\alpha^2 t}$ vilket ger att den allmänna lösningen är

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} e^{-\alpha^2 t}\, d\alpha$$

och det sista randvillkoret ger

$$e^{-2|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

Fouriers inversionsformel ger då att

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(2+i\alpha)x}\, dx = \frac{1}{\pi}[\frac{e^{-(2+i\alpha)x}}{-(2+i\alpha)}]_0^{\infty} = \frac{1}{(2+i\alpha)\pi}.$$

3. a) Vi har att sinusintegralen är lika med

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} x e^{-x}\sin(yx)\, dx$$

som genom Eulers formel och partialintegration räknas ut till att bli $4y/(\pi(y^2+1)^2)$.

b) Inversionsformeln för sinusintegralen ger tillsammans med första delen att

$$xe^{-x} = \int_0^{\infty} \frac{4y}{\pi(y^2+1)^2}\sin(yx)\, dy$$

vilket i sin tur ger att

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\sin(yx)\, dx = 2ye^{y}.$$

4. Vi ansätter

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

och om vi använder att

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

och

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

och tillåter oss att derivera under integraltecknet och jämför koefficienter så får vi

$$\begin{cases} a'_{2n}(t) = 0); \; a_{2n}(0) = -\frac{1}{n} \\ a'_{2n+1}(t) = \frac{4}{(2n+1)\pi} e^{(2n+1)^2 t}; \; a_{2n+1}(0) = \frac{2}{2n+1} \end{cases}$$

vilket ger $a_{2n}(t) = -1/n$ och $a_{2n+1}(t) = 4e^{(2n+1)^2 t}/((2n+1)^3 \pi) + 2/(2n+1) - 4/((2n+1)^3 \pi)$.

5. a) Se boken.

b) Se boken.

6. Vi ansätter $y(x) = x^\alpha$ och får $\alpha(\alpha - 1) + \alpha + \lambda = 0$ dvs $\alpha^2 = -\lambda$ och den allmänna lösningen $y(x) = C_1 x^\alpha + C_2 x^{-\alpha}$ om $\alpha \neq 0$ och $y(x) = C_1 + C_2 \log(x)$. Om $\alpha \neq 0$ ger det första randvillkoret $C_2 = -C_1$ och det andra $\alpha 2^\alpha + \alpha 2^{-\alpha} = 0$ dvs $2^{2\alpha} = 1$ vilket är ekvivalent med $\alpha = \pi i / \log(2)$. Om $\alpha = 0$ får vi istället $C_1 = 0$ från det första randvillkoret och $C_2 = 0$ från det andra så att det inte ger några icke-triviala lösningar.