Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet
Linjär analys, MA 318
5 poäng, den 13 januari 2005, 9.00-14.00
Examinator: B.Shapiro

Inga hjälpmedel tillåtna. Totala antalet poäng är 22. Återlämningen på måndag den 17 januari kl. 12.00 - 12.30 i rum 110, hus 6. Därefter hos studievägledaren på mottagningstid.

1. a) (2 poäng) Bestäm Fourierserien för

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ -\pi < x < \pi.$$

b) (2 poäng) Med hjälp av denna serie beräkna summan $\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4l+3}{1-(4l+3)^2} - \frac{4l+1}{1-(4l+1)^2}\right)$.

2. a) (3 poäng) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin\frac{\pi x}{2} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

b) (1 poäng) Visa att $\frac{\partial u(\frac{1}{2},t)}{\partial x} = 0$.

3. (3 poäng) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_y = 4u_{xx} \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ y \geq 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos^2 x. \end{cases}$$

4. (4 poäng) Bestäm egenvärden och egenfunktionerna till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} x^2X'' + 3xX' + \lambda X = 0 \text{ på } [1, e^4] \\ X(1) = X(e^4) = 0. \end{cases}$$

Tips. Använd koordinatbytet $x = e^s$.

5. (4 poäng) Tillämpa Fouriers integralformel på funktionen $f(x) = e^{-|x|}\cos x$, och använd resultatet för att beräkna integralen

$$\int \frac{2+\alpha^2}{(2+\alpha^2)^2 - 4\alpha^2} d\alpha$$

6. (3 poäng) Definiera polynom $P_n(x)$, $n \geq 0$ sådant att a) $P_n(x)$ har grad n; b) $P_n(x)$ är moniskt, dvs huvudkoefficienten är lika med 1; $P_n(x)$ bildar ett ortogonalt system över $[-1,1]$ med avseende på viktfunktionen x^2.

Bestäm $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$.

(Se baksidan för trigonometriska formler.)

Trigonometriska formler:

$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$$
$$2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$$
$$2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$