Facit till Linjär analys, den 13 januari 2005.

1. a) (2 poäng) Bestäm Fourierserien för

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ -\pi < x < \pi.$$

Lösning. Eftersom $\sinh x$ är udda sammanfaller dess Fourierserie med sinusserie $\sinh x = \sum_k b_k \sin kx$ där $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sinh x \sin kx dx$. Med hjälp av partiell integration fås

$$b_k = \frac{2}{\pi}[\sin kx \cosh x|_0^\pi + \int_0^\pi k \cosh x \cos kx dx] = \frac{2k}{\pi}[\cos kx \sinh x|_0^\pi + \int_0^\pi k \sinh x \sin kx dx].$$

Om man betecknar $I_k = \int_0^\pi \sinh x \sin kx dx$ så gäller $I_k(1-k^2) = k \cos k\pi \sinh \pi = \frac{(-1)^k k(e^\pi - e^{-\pi})}{2}$.

Svar. $\sinh x = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum \frac{(-1)^k k \sin kx}{1-k^2}$.

b) (2 poäng) Med hjälp av denna serie beräkna summan $\sum_{l=0}^\infty (\frac{4l+3}{1-(4l+3)^2} - \frac{4l+1}{1-(4l+1)^2})$.

Lösning. Om man sätter $x = \frac{\pi}{2}$ så gäller

$$\frac{\pi \sinh \frac{\pi}{2}}{e^\pi - e^{-\pi}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k k \sin kx}{1-k^2}.$$

Notera att $\sin \frac{\pi k}{2} = \begin{cases} 1, \text{ då } k = 4l+1, l = 0, \dots \\ 0, \text{ då } k = 2l, l = 0, \dots \\ -1, \text{ då } k = 4l+3, l = 0, \dots \end{cases}$.

Detta ger $\sum_{l=0}^\infty (\frac{4l+3}{1-(4l+3)^2} - \frac{4l+1}{1-(4l+1)^2}) = \frac{\pi \sinh \frac{\pi}{2}}{2 \sinh \pi} = \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi}{2}}$.

Svar. $\sum_{l=0}^\infty (\frac{4l+3}{1-(4l+3)^2} - \frac{4l+1}{1-(4l+1)^2}) = \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi}{2}}$.

2. a) 3 poäng) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin \frac{\pi x}{2} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Lösning. Man söker lösningen på formen $u = U + \Phi(x)$. Efter insättningen fås två följande system summan av vars lösningar ger oss lösningen till det ursprungliga systemet

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, \\ U(x,0) = -\Phi(x), U_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi'' + \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0. \end{cases}$$

Det andra systemet består av en linjär ode och två homogena villkor. Det är lätt att gissa att den partikulära lösningen till ODEn är lika med $\Phi_{part} = (\frac{2}{\pi})^2 \sin \frac{\pi x}{2}$. Dess allmänna lösning är på formen $\Phi_{all} = \Phi_{part} + a + bx$ men villkoren $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ medför att den sökta lösningen är lika med $\tilde{\Phi} = (\frac{2}{\pi})^2(\sin \frac{\pi x}{2} - x)$. Nu kan man finna lösningen till det fösta systemet.

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, \\ U(x,0) = (\frac{2}{\pi})^2(x - \sin \frac{\pi x}{2}), U_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Med separation av variablerna fås

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

Detta ger $X_k(x) = \sin \pi k x$, $k = 1, \dots$ och $T_k(t) = \cos \pi k t$, $k = 1, \dots$. Man söker lösningen på formen $U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \pi k x \cos \pi k t$ där $\sum a_k \sin \pi k x = \frac{4}{\pi^2}(x - \sin \frac{\pi x}{2})$. Detta innebär att $a_k = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \sin \pi k x (x - \sin \frac{\pi x}{2}) dx$. Låt oss beteckna $a_k = \frac{4}{\pi^2}(b_k - c_k)$ där $b_k = \int_0^1 x \sin \pi k x dx$ och $c_k = \int_0^1 \sin \pi k x \sin \frac{\pi x}{2} dx$. Med hjälp av partiell integration man får $b_k = \frac{(-1)^k}{\pi k}$. Med hjälp av trigonometriska formler fås $c_k = \frac{(-1)^k 4k}{\pi(4k^2-1)}$. Detta medför att $a_k = \frac{4(-1)^k}{\pi^3 k(4k^2-1)}$.

Svar. $u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}(\sin \frac{\pi x}{2} - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k(4k^2-1)} \sin \pi k x \cos \pi k t)$.

3. (3 poäng) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_y = 4u_{xx} \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \qquad 0 < x < \pi,\ y \geq 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos^2 x. \end{cases}$$

Lösning. Med separation av variablerna fås två system

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad Y' + 4\lambda Y = 0.$$

Det första problemet har egenfunktionerna $X_k(x) = \cos nx$, $n \geq 0$ vilket medför att egenfunktionerna till det andra problemet blir $Y_n(y) = e^{-4n^2 y}$. Alltså söker man lösningen till problemet på formen $u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos nx e^{-4n^2 y}$. Eftersom $u(x,0) = 1 + \cos^2 x = \frac{3}{2} + \cos 2x$ fås $u(x,y) = \frac{3}{2} + \cos 2x e^{-16y}$.

Svar. $u(x,y) = \frac{3}{2} + \cos 2x e^{-16y}$.

4. (4 poäng) Bestäm egenvärden och egenfunktionerna till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} x^2 X'' + 3xX' + \lambda X = 0 \text{ på } [1, e^4] \\ X(1) = X(e^4) = 0. \end{cases}$$

Tips. Använd koordinatbytet $x = e^s$.

Lösning. Med variabelsubstitution $x = e^s$ går det ursprungliga S-L-problemet över till

$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(4) = 0. \end{cases}$$

(Derivatorna är m.a.p variabeln s.) Eftersom vi söker egenfunktioner som uppfyller två homogena villkor $X(0) = X(4) = 0$ är vi bara intresserade av fallet $1 - \lambda < 0$. I detta fall blir den allmänna lösningen till $X'' + 2X' + \lambda X = 0$ lika med $X_{all} = e^{-t}(a \sin\sqrt{\lambda - 1}t + b\cos\sqrt{\lambda - 1}t)$. Med villkoren $X(0) = X(4) = 0$ får man en serie av egenfunktionerna $X_k(s) = e^{-s}\sin\frac{\pi k s}{4}$. Egenvärdena uppfyller relationen $\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\pi k}{4}$ vilket ger $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{16} + 1$.

Med avseende på den ursprungliga koordinaten x fås $X_k(x) = e^{-\ln x}\sin\frac{\pi k \ln x}{4} = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi k \ln x}{4}$.

Svar. $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{16} + 1$ och $X_k(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi k \ln x}{4}$.

5. (4 poäng) Tillämpa Fouriers integralformel på funktionen $f(x) = e^{-|x|}\cos x$, och använd resultatet för att beräkna integralen

$$\int \frac{2 + \alpha^2}{(2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2} d\alpha$$

Lösning. Eftersom funktionen är jämn vet man att $f(x) = \int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x dx$ där $A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\cos\alpha s ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-|s|}\cos s\cos\alpha s ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s}[\cos(1+\alpha)s + \cos(1-\alpha)s]ds$. Med partiell integration kan man visa att följande likhet gäller $I_\gamma = \int_0^\infty e^{-x}\cos\gamma x dx = \frac{1}{1+\gamma^2}$.

Detta ger oss att $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{1+(1-\alpha)^2} + \frac{1}{1+(1+\alpha)^2}] = \frac{1}{\pi}\frac{4+2\alpha^2}{(2+\alpha^2)^2-4\alpha^2} = \frac{4+2\alpha^2}{\pi(4+\alpha^4)}$.

Om man sätter $x = 0$ i likheten $e^{-|x|}\cos x = \int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x$ så fås

$$\int \frac{2 + \alpha^2}{(2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Svar. $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\frac{4+2\alpha^2}{(2+\alpha^2)^2-4\alpha^2}$.

6. (2 poäng) Definiera polynom $P_n(x)$, $n \geq 0$ sådant att a) $P_n(x)$ har grad n; b) $P_n(x)$ är moniskt, dvs huvudkoefficienten är lika med 1; $P_n(x)$ bildar ett ortogonalt system över $[-1, 1]$ med avseende på viktfunktionen x^2.

Bestäm $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$.

Lösning. Uppenbart fås $P_0(x) = 1$. Sedan söker man $P_1(x) = x + a$ som uppfyller villkoret $\int_{-1}^1 x^2(x + a)dx = 0$. Detta medför omedelbart $a = 0$. Alltså $P_1(x) = x$. Till slut söker man $P_2(x) = x^2 + ax + b$ some uppfyller två villkor $\int_{-1}^1 x^2(x^2 + ax + b)dx = 0$ och $\int_{-1}^1 x^3(x^2 + ax + b)dx = 0$. Efter några enkla beräkningar fås $P_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}$.

Svar. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}$.