

Inga hjälpmedel tillåtna. Totala antalet poäng är 25. Återlämningen på måndag den 22 augusti kl. 12.00 i rum 110, hus 5. Därefter hos Tom Wollecki.

1. A) (2 POÄNG) BESTÄM FOURIERCOSINUSUTVECKLINGEN FÖR $f(x) = \cos^3 x$ på intervallet $[0, \pi]$.

(Tips. Framställ $\cos^3 x$ som en linjär kombination av $\cos x$, $\cos 2x$ och $\cos 3x$.)

B) (2 POÄNG) BESTÄM FOURIERSINUSUTVECKLINGEN FÖR $g(x) = \sin^2 x$ på intervallet $[0, \pi]$.

2. (3 POÄNG) BESTÄM DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN TILL EKVATIONEN

$$u_{xy} + u_y = 0.$$

Tips. Sätt $v = u_y$.

B) (2 POÄNG) BESTÄM SPECIELLT EN LÖSNINGEN SOM UPPFYLLER $u(x, 0) = x$ OCH $u(0, y) = y$.

3. (4 POÄNG) BESTÄM LÖSNINGEN TILL SYSTEMET

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \end{cases}$$

4. A) (2 POÄNG) FRAMSTÄLL SOM FOURIERCOSINUSINTEGRAL $f(x) = \begin{cases} \alpha_0 x + \alpha_1 & \text{då } 0 < x < b \\ 0 & \text{då } x > b. \end{cases}$

B) (2 POÄNG) $h = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy$ KALLAS FÖR *konvolutionen* AV f OCH g . BERÄKNA $h = f * g$ DÄR $f(x) = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

5. (4 POÄNG) BESTÄM LÖSNINGEN TILL SYSTEMET

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\pi \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = \sin y \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=2\pi} = 2 \sin x. \end{cases}$$

6. (4 POÄNG) AVGÖR OM DET FINNS TAL a_0, a_n, b_n FÖR $n = 1, 2, 3, \dots$ SÅDANA ATT

a) $x = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$ för $1 < x < 4$,

b) $x = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/2) + b_n \sin(n\pi x/2)$ för $1 < x < 4$.

I vart och ett av fallen a) och b) ska man antingen visa att framställningen är omöjlig eller bestämma a_0, a_n och b_n så att likheten gäller (vilket ska motiveras).

(Tips. Kontrollera perioderna.)

Trigonometriska formler:

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

LYCKA TILL.