Facit till Linjär analys, 19 augusti 2005.

1. A) (2 POÄNG) BESTÄM FOURIERCOSINUSUTVECKLINGEN FÖR $f(x) = \cos^3 x$ på intervallet $[0, \pi]$. Tips. Framställ $\cos^3 x$ som en linjär kombination av $\cos x$, $\cos 2x$ och $\cos 3x$.

Lösning. $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(\frac{1+\cos 2x}{2}) = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x \cos 2x}{2} = \frac{3cosx}{4} + \frac{\cos 3x}{4}$.

Svar. Enlight Fouriersats blir svaret $\cos^3 x = \frac{3cosx}{4} + \frac{\cos 3x}{4}$.

B) (2 POÄNG) BESTÄM FOURIERSINUSUTVECKLINGEN FÖR $f(x) = \sin^2 x$ på intervallet $[0, \pi]$.

Lösning. $f(x) = \sum_1^\infty a_n \sin nx$ där

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x \sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{(1-\cos 2x)\sin nxdx}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^\pi \sin nxdx - \int_0^\pi \cos 2x \sin nxdx] = \frac{1}{\pi}[\frac{-\cos nx}{n}|_0^\pi - \frac{1}{2}(\int_0^\pi \sin(n+2)xdx + \int_0^\pi \sin(n-2)xdx)] =$$
$$= \frac{1}{\pi}[\frac{1-(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}(\frac{1-(-1)^{n+2}}{n+2} + \frac{1-(-1)^{n-2}}{n-2})]_{n\neq 2} = \frac{1}{\pi}\begin{cases} 0, \text{ där } n = 2k \\ \frac{-8}{(4k^2-1)(2k+3)}, \text{ där } n = 2k+1 \end{cases}$$

Svar. $\sin^2 x = \frac{-8}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\sin(2k+1)x}{(4k^2-1)(2k+3)}$.

2. (3 POÄNG) A) BESTÄM DEN ALLMÄNNA LÖSNINGEN TILL EKVATIONEN

$$u_{xy} + u_y = 0.$$

Tips. Sätt $v = u_y$.

Lösning. Man får $v_x + v = 0$ som är ekvivalent med $\frac{v_x}{v} = -1$ eller $(\ln v)_x = -1$ som medför $\ln v = -x + C(y)$ där $C(y)$ är en godtycklig funktion av y. Alltså $v = e^{-x}K(y)$ där $K(y)$ är en godtycklig funktion. Vidare, $v = u_y = e^{-x}K(y) \Rightarrow u = e^{-x}M(y) + N(x)$ där $M(y)$ och $N(x)$ är godtyckliga.

Svar. $u = e^{-x}M(y) + N(x)$.

B) (2 POÄNG) BESTÄM SPECIELLT EN LÖSNINGEN SOM UPPFYLLER $u(x,0) = x$ OCH $u(0,y) = y$.

Lösning. Man får

$$\begin{cases} u(0,y) = M(y) + N(0) = y \\ u(x,0) = M(0)e^{-x} + N(x) = x. \end{cases}$$

vilket ger $M(y) = y, N(x) = x$.

Svar. $u = ye^{-x} + x$.

3. (4 POÄNG) BESTÄM LÖSNINGEN TILL SYSTEMET

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 \le x \le \pi \\ u(x,0) = u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2} \end{cases}$$

Lösning. Med variabelseparation fås

$$a)\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ T(0) = 0. \end{cases}$$

Egenvärdena till a) är $\lambda_n = (\frac{2n+1}{2})^2, n = 0, ...,.$ och egenfunktionerna är $X_n = \sin\frac{2n+1}{2}x$. Mostsvarande egenfunktioner till b) är $T_n(t) = \sin\frac{2n+1}{2}t$.
Alltså $u(x,t) = \sum_0^\infty B_n \sin\frac{2n+1}{2}x \sin\frac{2n+1}{2}t$. Man får $u_t(x,t) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2}B_n \sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{2n+1}{2}t = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}$.
Detta betyder att $B_0 = 2$ och $\frac{5}{2}B_2 = 2$ och alla andra $B_i = 0$.

Svar. $u(x,t) = 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{4}{5}\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{5t}{2}$.

4. A) (2 POÄNG) FRAMSTÄLL SOM FOURIERCOSINUSINTEGRAL $f(x) = \begin{cases} \alpha_0 x + \alpha_1 \text{ då } 0 < x < b \\ 0 \text{ då } x > b. \end{cases}$

Lösning. $f(x) = \int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x dx$ där

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^b (\alpha_0 x + \alpha_1)\cos\alpha x dx = \frac{2}{\pi}\{\alpha_0 x\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\ |_0^b - \int_0^b (\frac{\alpha_0}{\alpha}\sin\alpha x + \alpha_1\cos\alpha x)dx\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\{\frac{\alpha_0}{\alpha}b\sin\alpha b + \frac{\alpha_0}{\alpha}\cos\alpha x\ |_0^b + \frac{\alpha_1}{\alpha}\sin\alpha x\ |_0^b\} = \frac{2}{\pi}\{\frac{\alpha_0}{\alpha}b\sin\alpha b + \frac{\alpha_0}{\alpha^2}(\cos\alpha b - 1) + \frac{\alpha_1}{\alpha}\sin\alpha b\}.$$

Svar. $A(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2\pi}\{\alpha_0(\alpha b\sin\alpha b + \cos\alpha b - 1) + \alpha_1 a\sin\alpha b\}$.

B) (2 POÄNG) $h = f*g = \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^\infty g(x-y)f(y)dy$ KALLAS FÖR *konvolutionen* AV f OCH g . BERÄKNA $h = f*g$ där $f(x) = g(x) = \begin{cases} e^{-x},\ x > 0 \\ 0,\ x < 0. \end{cases}$

Lösning. $h = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y)f(y)dy = \int_0^x f(x-y)f(y)dy = \int_0^x e^{-(x-y)}e^{-y}dy = \begin{cases} xe^{-x} \text{ då } x > 0 \\ 0 \text{ då } x \le 0 \end{cases}.$

Svar. $f * g(x) = \begin{cases} 0 \text{ då } x \le 0 \\ xe^{-x} \text{ då } x > 0 \end{cases}.$

5. (4 POÄNG) BESTÄM LÖSNINGEN TILL SYSTEMET

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 2\pi \\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = \sin y \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2\pi) = 2\sin x. \end{cases}$$

Lösning. Man ska dela problemet i a) och b).

$$a)\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(0, y) = v(\pi, y) = 0 \\ v(x, 0) = 0, v(x, 2\pi) = 2\sin x. \end{cases}$$

Med separation av variablerna $v = XY$ fås

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = n^2, X_n(x) = \sin nx \qquad \begin{cases} Y'' - n^2 Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow Y_n(y) = \sinh ny.$$

Alltså; $v(x, y) = \sum_1^\infty A_n \sin nx \sinh ny$ och $v(x, 2\pi) = 2\sin x$. Slutligen, $v(x, y) = \frac{2\sin x \sinh y}{\sinh 2\pi}$.

$$b)\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(0, y) = 0, w(\pi, y) = \sin y \\ w(x, 0) = w(x, 2\pi) = 0. \end{cases}$$

Med separation av variablerna $w = XY$ fås

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(2\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = (\frac{n}{2})^2, Y_n(y) = \sin\frac{ny}{2} \qquad \begin{cases} X'' - (\frac{n}{2})^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(y) = \sinh\frac{n}{2}x.$$

Alltså $w(x, y) = \sum_1^\infty \alpha_n \sinh\frac{nx}{2} \sin\frac{ny}{2}$ och $w(\pi, y) = \sin y$. Slutligen, $w(x, y) = \frac{\sin y \sinh x}{\sinh \pi}$.

Svar. $u(x, y) = \frac{2\sin x \sinh y}{\sinh 2\pi} + \frac{\sin y \sinh x}{\sinh \pi}$.

6. (4 POÄNG) AVGÖR OM DET FINNS TAL a_0, a_n, b_n FÖR $n = 1, 2, 3, \ldots$ SÅDANA ATT

a) $x = a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)$ för $1 < x < 4$,

b) $x = a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(n\pi x/2) + b_n \sin(n\pi x/2)$ för $1 < x < 4$.

I vart och ett av fallen a) och b) ska man antingen visa att framställningen är omöjlig eller bestämma a_0, a_n och b_n så att likheten gäller (vilket ska motiveras).

Lösning. a) Svaret är nej ty H.L. har period 2 vilket inte V.L. har.

b) I detta fall har de ing. cos- och sinus-termerna perioden 4 och funktionen $f(x) = x, 1 < x < 4$ kan (på olika sätt) utvidgas till en funktion $F(x)$ med period 4 och som är styckvis glatt t.ex kan vi välja F så att $F(x) = x$ för $0 < x < 4$ och sedan utvidga till en fkn med period 4. Vi får då $a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 x dx = 4$. I fallet $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 x\cos\frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2}[x(\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}]_0^4 = 0.$$

Samtidigt

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 x\sin\frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2}[x(\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}) + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}]_0^4 = -\frac{8}{\pi n}.$$

Svar. Vi har $F(x) = 2 - \frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}$ för $0 < x < 4$ och alltså $x = 2 - \frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}$ för $1 < x < 4$.