MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Rikard Bogvad

Tentamen i
Lineär analys pk, MA 318, M2
fredagen den 21 december 2005

Varje tal kan ge 24 poäng. Skrivande med godkänd inlämningsuppgift 1 behöver ej göra uppgift 1. De med godkänd inlämningsuppgift 2 tillgodoräknas 2 p. Observera att tillbakalämnande av tentan sker senare än som sagts.

Följande formel, hämtad ur en tabell över primitiva funktioner, kan vara nog så användbar användas:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}$$

1. Bestäm Fouriersinusutvecklingen för $f(x) = \sinh ax$ på intervallet $[0, \pi]$. Använd detta för att beräkna
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin n}{n^2 + 1}.$$

2. Framställ funktionen $f(x) := e^{-2x}$, $0 \leq x \leq 3$ och $f(x) := 0$ när $x > 3$, som en kosinusintegral $\int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$. Beräkna $\int_0^\infty A(\alpha) \cos 3\alpha d\alpha$.

3. Bestäm egenfunktioner och egenvärden till följande Sturm-Liouville problem:
$$(x^3 X')' + (\lambda x)X = 0,\ 1 < x < e,\ X(1) = X(e) = 0.$$
Vilken ortogonalitetsegenskap har egenfunktionerna? Ledning: Sätt $x = e^s$.

4. Bestäm en (formell) lösning $u(x,t)$ till följande problem: $u(x,t)$ ska uppfylla värmeekvationen $u_t(x,t) = 2u_{xx}(x,t),\ 0 < x < 2,\ t > 0$, och följande randvärdesvillkor ska gälla $u(0,t) = 0,\ t > 0$, samt $u(2,t) = 0,\ t > 0$, och $u(x,0) = x(x-2),\ 0 < x < 2$.

5. Bestäm en funktion $f(x,y,t),\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, t > 0$, som är en lösning till ekvationen $f_{tt} = f_{xx} + f_{yy}$, och uppfyller randvärdesvillkoren $f(0,y,t) = f(\pi,y,t) = f(x,0,t) = f(x,\pi,t) = 0$, samt $f(x,y,0) = \sin x \sin y$ och $f_t(x,y,0) = 0$.

6. Inför funktionen q genom $q(x) = \pi x$ på $[0,\pi]$ och $q(x) = x^2$ på$[-\pi, 0]$. Då har man $q(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Kan man säkert hävda att även $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$ är en fourierserie och i så fall varför? Om svaret skulle vara jakande: vilket värde har $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n$?

Skrivningsåterlämning sker fredagen den 30/12 kl 12 i rum 110 hus 5. Lycka till!