MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Rikard Bogvad

Lösningar till tentamen i
Lineär analys pk, MA 318, M2
onsdagen 21/12 2005

1. Bestäm Fouriersinusutvecklingen för $f(x) = \sin hax$ på intervallet $[0, \pi]$. Man får $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin hax \sin nxdx = \frac{2}{\pi}\{\sin hax(-\frac{\cos nx}{n})|_0^\pi +$

   $a\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\cos haxdx\} = \frac{2}{\pi}\{\frac{-\sin ha\pi \cos \pi n}{n} - \frac{a^2}{n^2}\int_0^\pi \sin nx \sin haxdx\}$.
   Alltså $a_n(1+\frac{a^2}{n^2}) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin ha\pi$ eller $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1} n \sin han}{n^2+a^2}$. Om

   $a = 1$ fås $\sin hx = \frac{2}{\pi}\sin h\pi \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2+1}$.
   Om man sätter in $x = 1$ fås
   $\sin h1 = \frac{2}{\pi}\sin h\pi \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} n \sin n}{n^2+1}$ Alltså är summan $\frac{\pi}{2}\frac{\sin h1}{\sin h\pi} = \frac{\pi}{2}\frac{e-e^{-1}}{e^\pi - e^{-\pi}}$.

2. Enligt Fouriers inversionsformel, som är tillämplig på f eftersom

   $$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$$

   och f och dess derivata är styckvis kontinuerliga, så är $1/2(f(x^+) + f(x^-)) = \int_0^\infty A(\alpha)\cos \alpha x d\alpha$, för $A(\alpha) = (2/\pi)\int_0^\infty f(x)\cos \alpha x dx$. Enligt formeln i skrivningens ledning är $A(\alpha) = \frac{2}{\pi(4+\alpha^2)}(e^{-6}(\alpha \sin 3\alpha - 2\cos 3\alpha) + 2)$. Den sökta integralen är lika med $1/2(f(3^+) + f(3^-)) = \frac{1}{2e^6}$.

3. Egenfunktionena $X_n(x)$ till detta reguljära Sturm-Liouville problem är ortogonala m a p viktfunktionen x, d v s $\int_1^e X_m(x)X_n(x)xdx = 0$, om $m \neq n$. Genom att sätta $x = e^s$, och $Y(s) = X(e^s)$förvandlas ekvationen till

   $$Y'' + 2Y' + \lambda Y = 0, 0 < s < 1,\ Y(0) = Y(1) = 0.$$

   Differentialekvationen har den karakteristiska ekvationen $x^2+2x+\lambda = 0$, med rötterna $r_1(\lambda) = -1+\sqrt{1-\lambda}$, och $r_1(\lambda) = -1-\sqrt{1-\lambda}$. Olika fall: först, reella rötter eller $\lambda \leq 1$. Då är $Y(s) = Ae^{r_1(\lambda)s} + Be^{r_2(\lambda)s}$. Det första bivillkoret ger att $A + B = 0$, vilket ger att $B = -A$. Det andra ger att $e^{r_1} - e^{r_2} = 0$, vilket bara är möjligt om $r_1 = r_2$, och motsvarande egenfunktion är trivial.(Alternativt kan man använda en sats i boken,sektion 44, som säger att egenvärdena är positiva för vissa Sturm-Liouville problem, däribland detta.) Sedan, då $\lambda > 1$, är lösningen $Y(s) = Ae^{-x}\cos\sqrt{\lambda-1}s + Be^{-x}\sin\sqrt{\lambda-1}s$. Det första bivillkoret ger att $A = 0$ och det andra ger att $\sin\sqrt{\lambda-1} = 0$, eller $\sqrt{\lambda-1} = n\pi$ eller $\lambda = 1+n^2\pi^2,\ n = 1, 2, \ldots$. Motsvarande egenfunktioner är alltså $X(x) = Y(\ln x) = x^{-1}\sin n\pi \ln x$.

4. Ansätt $u(x,t) = X(x)T(t)$, och få $\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Randvillkoren ger att $X(0) = X(2) = 0$. Betrakta först $\lambda > 0$ som ger att $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}}$. Det är lätt att se att det inte går att välja A, B så att randvillkoren är uppfyllda. På samma sätt ser man att $\lambda = 0$ med lösningarna $X(x) = Ax + B$ inte är möjlig. Alltså återstår $\lambda < 0$, med lösningarna $A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$, (där $\alpha = \sqrt{-\lambda}$). Randvillkoren här ger att $B = 0$ och $\sin 2\alpha = 0$, eller $\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Alltså är $u_n(x,t) = Ae^{2\alpha_n^2 t} \sin \alpha_n x$ lösningar, och för att tillfredsställa initialvillkoret ansätt

$$u(x,t) = \sum a_n e^{2\alpha_n^2 t} \sin \alpha_n x.$$

För $t = 0$ ska då

$$x(x-2) = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

d v s a_n är Fourier sinuskoefficienterna på intervallet $[0, 2]$. Detta ger att $a_n = (2/2) \int_0^2 x(x-2) \sin \alpha_n x dx dx = [-x(x-2) \cos \alpha_n x/\alpha_n + (2x - 2) \sin \alpha_n x/\alpha_n^2 + 2 \cos \alpha_n x/\alpha_n^3]_0^2 = \frac{2(-1)^n - 2}{\alpha_n^3}$ (med Kroneckers metod), och detta bestämmer den formella lösningen.

5. Ansätt en lösning $f(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$. Det leder till att $\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda$, en konstant. På samma sätt måste $\frac{Y''}{Y} = -\lambda - \frac{X''}{X} = -\mu$, för någon konstant μ. Detta ger två Sturm-Liouville problem:

$$X''(x) + (\lambda - \mu)X(x) = 0, \; X(0) = X(\pi) = 0,$$

och

$$Y''(x) + \mu Y(x) = 0, \; Y(0) = Y(\pi) = 0,$$

och ekvationen

$$T'' + \lambda T = 0, \; T'(0) = 0.$$

Problemet i Y har egenvärdena $\mu = m^2$, $m = 1, 2, \ldots$, och egenfunktionerna $Y_m(y) = \sin my$, medan det i X har egenvärdena $\lambda - \mu = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, och egenfunktionerna $X_n(x) = \sin nx$. Alltså har, för givna m, n,ekvationen i T, lösningen $T_{mn}(t) = \cos(t\sqrt{m^2 + n^2})$. En formell lösning är alltså en oändlig serie i funktionerna $u_{mn}(x,y,t) = \sin my \; \sin nx \cos(t\sqrt{m^2 + n^2})$. För att bestämma koefficienterna, titta nu på villkoret $f(x,y,0) = \sin x \sin y$, och notera att $u_{mn}(x,y,0) = \sin my \; \sin nx$. Alltså uppfyller $u_{11}(x,y,t) = \sin y \sin x \cos(t\sqrt{2})$ detta initialvillkor och är den sökta lösningen.

6. Den beskrivna funktionen q har till att börja med tre väsentliga egenskaper: den är kontinuerlig med $q(\pi) = q(-\pi)$ och dess derivata är styckvis kontinuerlig (liksom dess andraderivata). För en sådan funktion säger en känd sats att dess fourierserie kan deriveras termvis och att den ny serien motsvarar q'. Således

$$q'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \{nb_n \cos nx - na_n \sin nx\}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Emellertid ger den styckvisa kontinuiteten hos q'' tillika med språnget för q' i $x = 0$ att inversionssatsen garanterar beräkningen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = \frac{1}{2}\{q'(0+) + q'(0-)\} = \frac{\pi}{2}.$$