MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Rikard Bogvad

Tentamen i
Lineär analys pk, MA 318, M2
onsdagen den 18 januari 2006

Varje tal kan ge 24 poäng. Ungefär hälften av maximalt poängantal ger godkänt. Poäng från inlämningsuppgifter kan inte tillgodoräknas på denna omtenta.

Här är en snygg och användbar formel, hämtad ur en tabell över trigonometriska funktioner:

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B).$$

1. Bestäm Fourierutvecklingen för $f(x) = |\sin\pi x|$ på intervallet $[-1, 1]$. Använd resultatet för att beräkna
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

2. Låt $f(x)$ vara funktionen som är 1 när $x < 0$ och e^{-x} när $x \geq 0$.Visa att för det mesta är
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha.$$
Precis när gäller likhet och varför? Beräkna med hjälp av resultatet $\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha$. Tips: Kom ihåg att integraler av produkter av typen $e^{ax}\cos bx$ beräknas lättast genom att utnyttja komplexa variabler och använda $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

3. Bestäm egenfunktioner och egenvärden (de behövs inte beskrivas explicit, utan kan ges på en lämplig implicit form) till följande Sturm-Liouville problem:
$$X'' + \lambda X = 0,\ 0 < x < 1,\ X(0) = 0,\ 3X(1) - 2X'(1) = 0.$$
Vilken ortogonalitetsegenskap har egenfunktionerna?

4. Bestäm en (formell) lösning $u(x,t)$ till följande problem: $u(x,t)$ ska uppfylla värmeekvationen $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0$, och följande randvärdesvillkor ska gälla $u(0,t) = 0,\ t > 0$, samt $u(\pi,t) = 0,\ t > 0$, och $u(x,0) = x(x-\pi),\ 0 < x < \pi$.

5. Bestäm lösningen till randvärdesproblemet
$$u_{tt} = a^2u_{xx} + Ae^{-t}\sin x$$
$$u(x,0) = u(x,0) + u_t(x,0) = 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$
Tips. Sök lösningen på formen $u(x,t) = U(x,t) + \alpha e^{-t}\sin x$.

Motivera också lösningens entydighet.

6. Låt $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2 dx$ vara en skalärprodukt för funktioner på $[-1, 1]$.

   a)Bestäm en ON-bas för vektorrummet av tredjegradspolynom.

   b)Motivera varför det finns en följd av moniska n:te-grads polynom p_n, $n = 0, 1, 2, ...$ som bildar ett ON-system.

Skrivningsåterlämning sker tisdagen den 26/1 kl 12 i rum 210 hus 5. Därefter finns skrivningarna hos Tom Wollecki i samma hus. Lycka till!