MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Rikard Bogvad

Tentamen i
Lineär analys pk, MA 318, M2
onsdagen den 18 januari 2006

Lösningar

1. Funktionen är en jämn funktion så Fourierserieutvecklingen är densamma som cosinusserieutvecklingen på $[0, 1]$, d v s

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x,$$

där

$$a_0 = 2\int_0^1 \sin\ \pi x dx = 4/\pi$$

och

$$a_n = 2\int_0^1 \sin\ \pi x \cos n\pi x dx = \frac{1}{\pi}\frac{2(1+(-1)^n)}{1-n^2}.$$

(med hjälp av formeln i början av tentan) Alltså är svaret

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\pi x.$$

Sätt $x = 0$. Det ger, eftersom $f(x)$ är styckesvis glatt, att

$$= 0 = \sin 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2},$$

eller efter ommöblering att den sökta summan är 1/2(lätt att se annars också!).

2. Generellt

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x d\alpha,$$

där

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

och

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha.$$

Integralen konvergerar mot funktionsvärdet överallt där funktionen är styckesvis glatt, d v s i alla punkter utom $x = 0$. I denna punkt konvergerar * till medelvärdet av funktionens ensidiga gränsvärden där, d v s $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, så

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha,$$

eller

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha.$$

Lite tankar om $\arctan x$ och döden i oändligheten gör att vi inser att detta, ack, visste vi redan.

3. Gå igenom de olika egenvärdena: $\lambda = 0$. Då är $X(x) = Ax + B$ och randvillkoren ger att $A = B = 0$; alltså endast trivial egenfunktion. $\lambda = -\alpha^2 < 0$. Då är $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ och randvillkoret $X(0) = 0$ ger att $B = -A$, alltså är $X(x) = A(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$. Det andra randvillkoret leder nu till att $A = 0$;alltså endast trivial egenfunktion även här. $\lambda = \alpha^2 > 0$. Då är $X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ och randvillkoret $X(0) = 0$ ger att $A = 0$. Det andra ger att

$$\alpha = \frac{3\tan\alpha}{2},$$

vilket har vissa lösningar α_n. Egenfunktioner är alltså $\sin\alpha_n x$ och egenvärdena α_n^2.

Bestäm egenfunktioner och egenvärden (de behövs inte beskrivas explicit, utan kan ges på en lämplig implicit form) till följande Sturm-Liouville problem:

$$X'' + \lambda X = 0,\ 0 < x < 1,\ X(0) = 0,\ 3X(1) - 2X'(1) = 0.$$

Vilken ortogonalitetsegenskap har egenfunktionerna?

4. Ansätt $u(x,t) = X(x)T(t)$, och få $\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Randvillkoren ger att $X(0) = X(\pi) = 0$. Betrakta först $\lambda > 0$ som ger att $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}}$. Det är lätt att se att det inte går att välja A, B så att randvillkoren är uppfyllda. På samma sätt ser man att $\lambda = 0$ med lösningarna $X(x) = Ax + B$ inte är möjlig. Alltså återstår $\lambda < 0$, med lösningarna $A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$, (där $\alpha = \sqrt{-\lambda}$). Randvillkoren här ger att $B = 0$ och $\sin\pi\alpha = 0$, eller $\alpha = \alpha_n = n,\ n = 1, 2, \ldots$. Alltså är $u_n(x,t) = Ae^{-n^2 t}\sin nx$ lösningar, och för att tillfredsställa initialvillkoret ansätt

$$u(x,t) = \sum a_n e^{-n^2 t}\sin nx.$$

För $t = 0$ ska då

$$x(x-\pi) = \sum a_n \sin nx$$

d v s a_n är Fourier sinuskoefficienterna på intervallet $[0, \pi]$. Detta ger att $a_n = (2/\pi)\int_0^\pi x(x-\pi)\sin nx dx dx == \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{\alpha_n^3}$ (med Kroneckers metod), och detta bestämmer den formella lösningen.

5. Om man sätter i tipset fås

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} U(x,0) = -\alpha \sin x; U_t(x,0) = \alpha \sin x \; eller \; U(x,0)+U_t(x,0) = 0$$

$$U(0,t) = U(\pi,t) = 0.$$

och $\alpha e^{-t} \sin x = -a^2 \alpha e^{-t} \sin x + Ae^{-t} \sin x$ eller $\alpha = \frac{A}{1+a^2}$.

Alltså $U_{tt} = a^2 U_{xx}$

$U(x,0) = -\frac{A}{1+a^2} \sin x; U(x,0) + U_t(x,0) = 0$
$U(0,t) = U(\pi,t) = 0.$. Med separation av variablerna $U = XT$ fås

$X'' + \lambda X = 0$

$X(0) = X(\pi) = 0$ och $T'' + \lambda a^2 T = 0$
$T(0) + T'(0) = 0.$

Alltså, $\lambda_n = n^2, X_n = \sin nx$. Man sätter i $T_n(t) = \alpha_n \sin ant + \beta_n \cos ant$. Därifrån $\beta_n + an\alpha_n = 0$ eller $\beta_n = -an, \alpha_n = 1$. Slutligen $T_n(t) = \sin ant - an \cos ant$.

Man söker lösningen på formen

$$U(x,t) = \sum_1^\infty b_n \sin nx (\sin ant - an \cos ant).$$

Det sista villkoret $U(x,t) = \frac{-A}{1+a^2} \sin x$ ger oss

$$\sum_1^\infty b_n \sin nx(-a_n) = \frac{-A}{1+a^2} \sin x$$

eller $b_n = 0, n \geq 2$ och $b_1 = \frac{A}{a(1+a^2)}$. Svar. $u(x,t) = \frac{A}{1+a^2} e^{-t} \sin x + \frac{A}{a(1+a^2)} \sin x(\sin at - a \cos at)$.

6. Låt $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2 dx$ vara en skalärprodukt för funktioner på $[-1,1]$.

   Man ser lätt att $|1|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$, så att $e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ är en vektor av längd 1. Vidare är $f_2 = x - (x,e_1)e_1$ ortogonal mot e_1. Men $(x,e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$, så $f_2 = x$ är ortogonal mot e_1. Nu är $|x|^2 = \int_{-1}^{1} x^4 dx = 2/5$ så $e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} x$, bildar tillsammans med e_1 ett ON-system. Fortsätt med Gram-Schmidt: $f_3 = x^2 - (x^2,e_1)e_1 - (x^2,e_2)e_2 = x^2 - \frac{3/5}{x}$. Normen $|f_3| = 176/175$, så den tredje vektorn i ON-basen blir $e_3 = \sqrt{\frac{175}{176}}(x^2 - \frac{3/5}{x})$

   Att det finns en följd av moniska n:te-grads polynom p_n, $n = 0, 1, 2, ...$ som bildar ett ON-system, är uppenbart från sättet att systematiskt hitta de tre första i den föregående delen.