MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Rikard Bogvad

Lösningar till tentamen i
Lineär analys pk, MA 318, M2
onsdagen den 18 augusti 2006

1. Bestäm Fouriercosinusutvecklingen på intervallet $[0,1]$ för

$$f(x) = |2x-1|.$$

Lösning: Man får $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos \pi n x$, där

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos \pi nx dx = 2[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)\cos \pi nx dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\cos \pi nx dx] =$$

$$2[\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi nx dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \pi nx dx - 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos \pi nx dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x\cos \pi nx dx] =$$

$$2\{\frac{\sin \pi nx}{\pi n}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin \pi nx}{\pi n}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - 2[x\frac{\sin \pi nx}{\pi n}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\cos \pi nx}{\pi^2 n^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}] + 2[x\frac{\sin \pi nx}{\pi n}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{\cos \pi nx}{\pi^2 n^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^1]\} =$$

$$= 2\{\frac{-2}{\pi^2 n^2}[2\cos\frac{\pi n}{2} - 1 - \cos \pi n]\}.$$

Alltså,

$$a_n = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}(1 + (-1)^{2k+1} - 2\cos\frac{\pi(2k+1)}{2}) = 0,$$

där om $n = 2k+1$,
$\frac{4}{\pi^2 16k^2}(1 + (-1)^{4k} - 2(-1)^{2k}) = 0$, liksom för $n = 4k$,

$$\frac{4}{\pi^2(4k+2)^2}(1 + (-1)^{4k+2} - 2(-1)^{2k+1}) = \frac{16}{\pi^2(4k+2)^2},$$

där $n = 4k+2$.
Vidare, $a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx = 4(x - x^2)\ |_0^{\frac{1}{2}} = 1$. Svar. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^\infty \frac{16}{\pi^2(4k+2)^2}\cos(4k+2)\pi x$.

Beräkna $\sum_{k=0}^\infty \frac{16}{\pi^2(4k+2)^2}$.

Lösning. Om $x = 0$ fås $1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^\infty \frac{16}{\pi^2(4k+2)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^\infty \frac{16}{\pi^2(4k+2)^2} = \frac{1}{2}$.

2. Framställ funktionen $f(x) = 1 - x$, om $0 < x < 1$ och 0, då $1 < x < \infty$ som en Fouriersinusintegral. Man söker en framställning på formen

$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha) \sin \alpha x dx$ där
$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1 - x) \sin \alpha x dx = \frac{2}{\pi} \{ \frac{-\cos \alpha x}{\alpha} \ |_0^1 + \frac{x \cos \alpha x}{\alpha} \ |_0^1 - \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \} = \frac{2(\alpha - \sin \alpha)}{\pi \alpha^2}$.
Så svaret är

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^2}) \sin \alpha x d\alpha.$$

Om $x = \frac{1}{2}$ så

$$\frac{1}{2} = f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\alpha - \sin \alpha)}{\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha$$

eller

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^\infty \frac{(\alpha - \sin \alpha)}{\alpha^2} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha.$$

3. Bestäm egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$(x^2 y')' + \lambda X = 0$$

på $[1, 4]$ och så att

$$y(1) = y(4) = 0.$$

Med koordinatbyte $x = e^s$ fås

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + \lambda s = 0; \quad y(0) = y(\ln 4) = 0.$$

Den allmänna lösningen till det nya problemet är

$$y = e^{\frac{-s}{2}} (a \sin s \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} + b \cos s \sqrt{\lambda - \frac{1}{4}})$$

och eftersom $y(0) = y(\ln 4) = 0$ fås $b = 0$ och $\ln 4 \sqrt{\lambda_k - \frac{1}{4}} = \pi k$.

Egenvärden är $\alpha_k = \sqrt{\lambda_k - \frac{1}{4}} = \frac{\pi k}{\ln 4}$ och egenfunktioner är $y_k = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sin \pi k \ln x}{\ln 4}$.

4. Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 < x < p, \ 0 < y < s$$

$$u_x(0, y) = u_x(p, y) = 0, \quad u(x, 0) = A, \quad u(x, s) = Bx.$$

Enligt superpositionsprincipen söker man lösningar som summan av den harmoniska funktion som uppfyller

I) $u_x(0, y) = u_x(p, y) = u(x, 0) = 0$ och $u(x, s) = Bx$ och den harmoniska funktion som uppfyller

II) $u_x(0, y) = u_x(p, y) = u(x, s) = 0$ och $u(x, 0) = A$.

Variabelseparation ger oss

1)$X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(p) = 0$,

2)$Y'' - \lambda Y = 0$ $Y(0) = 0$.

Problem I) har $\lambda_n = (\pi n/p)^2 =: \alpha_n^2, n = 1, 2, 3...$ med $X_k = \cos \alpha_n x$ som lösningar. Motsvarande lösningar till problem 2) är $Y_k = \sin h$ $alpha_n y$.

Alltså sökes $u(x, y)$ som

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_n x \sin h\alpha_n y.$$

Det sista villkoret ger oss

$$u(x, s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_n x \sin h\alpha_n s = Bx.$$

Detta ger med Fourierutveckling av högerledet att $a_k = \frac{-2Bp}{\pi^2 n^2 \sin h\alpha_n s((-1)^n - 1)}$, och bestämmer lösningen till problem 1.

Problem II har en uppenbar lösning $\frac{A(s-y)}{s}$.

Summan av dessa två är den sökta lösningen.

5. Bestäm lösningen till randvärdesproblemet

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u(x, 0) = u_x(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = 1, h > 0$$

Med variabelseparation fås

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda$$

eller A)

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0,$$

B)

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

$$T(0) = 0.$$

Egenvärden till A) är lösningar till $-\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}l + h\cos\sqrt{\lambda_n}l = 0$ eller

$\sqrt{\lambda_n}\tan\sqrt{\lambda_n}l = h \Rightarrow \tan\sqrt{\lambda_n}l = \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}}$.

Egenfunktionerna är $X_n = \cos\sqrt{\lambda_n}x$. Motsvarande lösningar till B) är $T_n = \sin a\sqrt{\lambda_n}t$.

Lösningen sökes på formen $u(x,t) = \sum_1^\infty a_n \cos\alpha_n x \sin a\alpha_n t$, där $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Villkoret $u_t(x,0) = 1$ ger oss $\sum_1^\infty aa_n\alpha_n \cos\alpha_n x = 1$.

Man vet att funktionerna $\cos\alpha_n x$ är ortogonala på $[0,l]$ och $\int_0^l \cos^2\alpha_k x dx = \frac{(hl+\sin^2\alpha_k l)}{2h}$, se 4de upplagan, s. 167.

Alltså $a\alpha_n a_n \int_0^l \cos^2\alpha_n x dx = \int_0^l \cos\alpha_n x dx = \frac{\sin\alpha_n l}{\alpha_n}$, eller

$a_n = \frac{2h\sin\alpha_n l}{\alpha_n^2 a(hl+\sin^2\alpha_n l)}$.

Enligt identiteten $\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ fås $\sin^2\alpha_n l = \frac{h^2}{h^2+\alpha_n^2}$.

På grund av detta kan a_n skrivas om som

$$a_n = \frac{2h}{a\alpha_n^2}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{h^2+\alpha_n^2}}}{(hl+\frac{h^2}{h^2+\alpha_n^2})} = \frac{2h}{a\alpha_n^2}\frac{\sqrt{h^2+\alpha_n^2}}{l(h^2+\alpha_n^2)+h}.$$

6. Låt $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)e^x dx$ vara en skalärprodukt för funktioner på $[-1, 1]$.

   Man inser att $|1|^2 = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1} =: A^{-2}$, så att $e_1 = \sqrt{A}$ är en vektor av längd 1. Vidare är $f_2 = x - (x, e_1)e_1$ ortogonal mot e_1.

   Men $(x, e_1) = A \int_{-1}^{1} xe^x dx = A([x-1)e^x)]_{-1}^{1} = Ae^{-1}$, så $f_2 = x - A^2 e^{-1} = x - B$, där $B = A^2 e^{-1}$, är ortogonal mot e_1.

   Sätt $C = |f_2|^2 = \int_{-1}^{1} (x-B)^2 e^x dx$, (den kan räknas ut med Kroneckers trick i boken; det är inte nödvändigt)så den andra vektorn i ON-basen blir $e_2 = \sqrt{\frac{1}{C}}(x - B)$. Att det finns en följd av moniska n:te-grads polynom p_n, $n = 0, 1, 2, ...$ som bildar ett ON-system, är uppenbart från sättet att systematiskt hitta de två första i den föregående delen.