MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamen i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Lineär analys pk, MA 318
Avd Matematik	Onsdagen den 20 december 2006
Examinator: Jesper Tidblom	

Varje tal kan ge 4 poäng. Det totala poängantalet är 24. 12 poäng ger säkert godkänt. Lycka till !

1. a) (3p) Bestäm Fourierserien på intervallet $-\pi < x < \pi$ för

$$f(x) = \cos \alpha x,$$

där α är en ickeheltalsvärd reell konstant.
Härled från detta, identiteten

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\alpha - n)\pi}{\alpha - n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha + n)\pi}{\alpha + n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha + n)\pi}{\alpha + n}.$$

b) (1p) Kan vi vara säkra på att Fourierserien i a) verkligen konvergerar mot $f(x)$ punktvis i intervallet $-\pi < x < \pi$? (Motivering krävs)

2. Låt funktionen $f(x)$, vara definierad för $x > 0$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & 0 < x < 1 \\ a & x = 1 \\ 0 & x > 1, \end{cases}$$

där a är en konstant.

a) (2p) Bestäm sinusintegralen för $f(x)$.
(Notera att värdet på a ej påverkar denna integral.)

b) (1p) Hur ska a väljas för att $f(x)$ ska vara lika med sin sinusintegral för alla $x > 0$? (motivering krävs)

c) (1p) Den beräknade sinusintegralen är en väldefinierad funktion av x för alla $x \in \mathbb{R}$. Rita grafen till denna funktion.
(Speciellt ska funktionsvärdena i eventuella diskontinuitetspunkter framgå).

3. (4p) Bestäm en lösning till vågekvationen

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = 2\sin 2x + 3\sin x, \quad u_t(x,0) = \sin 5x.$$

Ledning : Notera den speciella formen av de givna initialvärdesfunktionerna.

4. Antag att vi har ett ortonormerat system av funktioner, $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ i något funktionsrum(tex $C_p(a,b)$) med en skalärprodukt.

   a) (1.5p) Om vi skall ha en chans att representera en godtycklig funktion $f(x)$ i vårt vektorrum som en "generaliserad lineärkombination"

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

   hur måste vi isåfall välja konstanterna c_n ?
   Kan vi vara säkra på att vi har likhet ovan om vi väljer konstanterna enligt svaret på den föregående frågan ?

   b) (2.5p) Formulera och bevisa Bessels olikhet.

5. (4p) Lös värmespridningsproblemet

$$u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = x(\pi - x).$$

6. (4p) Bestäm en begränsad lösning till randvärdesproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ 0 < x < 1,\ y > 0$$

$$u_x(0,y) = 0,\ \ u(1,y) + u_x(1,y) = 0$$

$$u(x,0) = 1.$$

   Svaret får innehålla egenvärden som inte behöver beräknas explicit. Dock bör det framgå vilken ekvation som teoretiskt skulle behöva lösas för att få fram dessa egenvärden.

Skrivningsåterlämning sker fredagen den 22/12 kl 10 i kafeterian i hus 5. Därefter finns skrivningarna hos Tom Wollecki i hus 6.

Trigonometriska formler :

$$\begin{aligned}
2\sin a \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\
2\cos a \cos b &= \cos(a-b) + \cos(a+b) \\
2\sin a \cos b &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b
\end{aligned}$$