Lösningsförslag till tentamen i Linjär analys pk, 20 December 2006.

1. a) Fourierserien till funktionen $f(x)$ på intervallet $-\pi < x < \pi$ ges av uttrycket
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
där
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$
Eftersom $f(x) = \cos \alpha x$ är en jämn funktion så är $b_n = 0$ för alla $n \geq 1$. Vi beräknar uttrycket för a_n :
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = (\text{ty } f(x) \text{ jämn}) \; \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx \\ &= (\text{produktformlerna}) \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos{(\alpha - n)x} + \cos{(\alpha + n)x} \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin{(\alpha - n)\pi}}{\alpha - n} + \frac{\sin{(\alpha + n)\pi}}{\alpha + n} \right). \end{aligned}$$
Vi erhåller därmed vår sökta serie
$$\cos \alpha x = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin{(\alpha - n)\pi}}{\alpha - n} + \frac{\sin{(\alpha + n)\pi}}{\alpha + n} \right) \cos nx.$$
Evaluering i $x = 0$ ger oss den efterfrågade identiteten.
b) Ja, vi kan vara säkra på att serien i a) konvergerar punktvis mot $f(x)$. Vi har nämligen att $f(x)$ är styckvis kontinuering på $-\pi < x < \pi$ och $f'_L(x)$ och $f'_R(x)$ existerar i varje punkt. Detta ger enligt konvergenssatsen för Fourierserier att serien konvergerar mot $(f(x+) + f(x-))/2$ för alla $x \in (-\pi, \pi)$, men eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så är $(f(x+)+f(x-))/2 = f(x)$.

2. Sinusintegralen för en funktion $f(x)$ ges av uttrycket
$$f(x) \sim \int_{0}^{\infty} B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha, \; \text{där } B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx.$$
I vårt fall får vi
$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} (3x + 1) \sin \alpha x \, dx = \frac{6}{\pi} \left(\left[\frac{-x \cos \alpha x}{\alpha} \right]_0^1 + \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{1} \cos \alpha x dx \right) \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} \sin \alpha x \, dx = \frac{6}{\pi} \left(\frac{-\cos \alpha}{\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} \right) - \frac{2}{\pi} \frac{\cos \alpha}{\alpha} + \frac{2}{\alpha\pi}. \end{aligned}$$

Vi erhåller därmed sinusintegralen

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{-4\cos\alpha}{\alpha}+\frac{3\sin\alpha}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\alpha x\,d\alpha.$$

b) a måste väljas till $(f(1-)+f(1+))/2 = (4+0)/2 = 2$ om vi vill ha likhet (se motiveringen i c)).
c) Betrakta funktionen $F(x)$ som vi definierar som den udda utvidningen av $f(x)$ (efter att vi satt $a = 2$). För $x = 0$ definierar vi $F(0) = 0$.
$F(x)$ ges alltså av

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ -2 & x = -1 \\ 3x-1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 3x+1 & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}.$$

Beräknar vi Fourierintegralen för $F(x)$ så får vi sinusintegralen för $f(x)$ som vi beräknat i a).
Vi vet att funktionen $F(x)$ är absolutintegrerbar, styckvis kontinuering på varje begränsat intervall, att $F_L'(x)$ och $F_R'(x)$ existerar för alla x och att $(F(x+)+F(x-))/2 = F(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Konvergenssatsen för Fourierintegraler säger oss då att $F(x)$ är lika med sin Fourierintegral för alla $x \in \mathbb{R}$. Speciellt får vi att $f(x)$ är lika med sin sinusintegral för alla $x > 0$.
Den sökta grafen i c) är alltså grafen för $F(x)$

3. Vi ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ i vågekvationen, vilket tilsammans med randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ger oss de två differentialekvationerna

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x) &= 0,\ X(0) = X(\pi) = 0 \\ T''(t)+\lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Vi kan enligt sats från boken utesluta negativa egenvärden till den övre ekvationen. $\lambda = 0$ medför att $X(x) \equiv 0$, så alla egenvärden måste vara strikt positiva.

Vi kan då uttrycka den allmänna lösningen till den övre ekvationen enligt

$$X(x) = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x,\ \text{där } \lambda = \alpha^2, \alpha > 0.$$

Randvillkoret $X(0) = 0$ ger oss att $c_1 = 0$ och randvillkoret $X(\pi) = 0$ ger oss att $\sin\alpha\pi = 0$, dvs $\alpha = n$. Vi får alltså egenvärdena $\lambda_n = n^2$ och motsvarande egenfunktioner till $X_n(x) = c \cdot \sin nx$.
Givet $\lambda_n = n^2$ så har vi lösningen

$$T(t) = c_1\cos nt + c_2\sin nt,\ (\text{där } c_1, c_2 \text{ är godtyckliga konstanter})$$

till vår andra ekvation.
Den generella lösningen till vår vågekvation (innan initialvärdena tagits i beaktande) är alltså

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c(n)\sin nx\cos nt + d(n)\sin nx\sin nt\right)$$

Villkoret

$$2\sin 2x + 3\sin x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\sin nx$$

ger att $c(1) = 3$, $c(2) = 2$ och $c(n) = 0$ då $n \neq 1, 2$ (notera att vi här inte behöver utföra några integralberäkningar för att få fram sinuskoefficienterna).
Vårt andra randvillkor ger

$$\sin 5x = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nd(n)\sin nx,$$

så $d(5) = \frac{1}{5}$ och $d(n) = 0$ då $n \neq 5$. Vi erhåller alltså lösningen

$$u(x,t) = 3\sin x\cos x + 2\sin 2x\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 5x\sin 5t.$$

4. a) Om vi, givet ett ortonormerat system $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, vill representera en funktion $f(x)$ enligt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \tag{0.1}$$

så krävs att $c_m = (f, \phi_m)$ (skalärprodukten mellan f och ϕ_n), vilket inses genom att skalärmultiplicera båda led i (0.1) med ϕ_m och utnyttja att $(\phi_n, \phi_m) = 0$ om $n \neq m$ och $(\phi_n, \phi_n) = 1$.
Även om vi väljer konstanterna på nyss beskrivna sätt så är det inte säkert att $f(x)$ kan skrivas som en sådan serie. För att detta ska vara möjligt krävs att funktionsfamiljen $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ är *komplett* i det givna funktionsrummet.
b) Se kursboken.

5. Vi ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ i värme-ekvationen, vilket tilsammans med randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ger oss de två differentialekvationerna

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0,\ X(0) = X(\pi) = 0 \\ T'(t) + 3\lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Enligt sats i boken så vet vi att $\lambda \geq 0$. $\lambda = 0$ kan också uteslutas, ty det ger oss $X(x) \equiv 0$. Vi kan skriva den generella lösningen till den översta ekvationen som

$$X(x) = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x,\ \text{där } \alpha^2 = \lambda,\ \alpha > 0,$$

innan vi tagit randvärdena i beaktande. Randvillkoret $X(0) = 0$ ger att $c_1 = 0$ och $X(\pi) = 0$ ger $\alpha = n$, $n = 1, 2, \ldots$ Vi får egenvärdena $\lambda_n = n^2$ och motsvarande egenfunktioner $X_n(x) = \sin nx$. Den andra ekvationen har, för $\lambda = n^2$, egenfunktionen

$$T_n(t) = c \cdot e^{-3n^2t}.$$

Den generella lösningen till vår värme-ekvation innan initialvärdena beaktats blir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin nxe^{-3n^2t}.$$

Randvillkoret

$$x(\pi - x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx,$$

ger

$$c_n \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx.$$

$$\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx = \left[\frac{-x^2\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \pi^2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$+\frac{2}{n}\left(\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \pi^2\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3}$$

Så

$$c_n = 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + 2\pi\frac{(-1)^n}{n} - \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}.$$

Vår sökta lösning blir därmed

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1 - (-1)^n)}{n^3}\sin(nx)e^{-3n^2t} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin((2n-1)x)e^{-3(2n-1)^2t}.$$

6. Vi ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ i vår Laplace-ekvation, vilket leder till de två ekvationerna

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad X'(0) = 0,\ X(1) + X'(1) = 0 \\ T''(t) - \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Enligt sats i boken så vet vi att $\lambda \geq 0$. $\lambda = 0$ kan också uteslutas, ty det ger oss $X(x) \equiv 0$. Vi kan skriva den generella lösningen till den översta ekvationen som

$$X(x) = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x,\ \text{där } \alpha^2 = \lambda,\ \alpha > 0,$$

innan vi tagit randvärdena i beaktande. Randvillkoret $X'(0) = 0$ ger att $c_2 = 0$. Villkoret $X(1) + X'(1) = 0$ ger

$$\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Detta är en ekvation vi inte kan lösa explicit. Vi får nöja oss med att numrera lösningarna enligt $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$. Vi har då att egenvärdena $\lambda_n = \alpha_n^2$ och motsvarande egenfunktioner $X_n(x) = \cos\alpha_n x$.
Givet $\lambda = \alpha_n^2$ så har den andra ekvationen lösningen

$$T_n(t) = d_1 \cdot e^{\alpha_n t} + d_2 \cdot e^{-\alpha_n t}$$

Här måste vi dock ha att $d_1 = 0$, ty annars blir inte funktionen begränsad (kom ihåg att $\alpha_n > 0$). Den generella lösningen till vår Laplace-ekvation innan initialvärdena beaktats blir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\alpha_n x) e^{-\alpha_n t}.$$

Vårt initialvärdesvillkor ger

$$1 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\alpha_n x). \tag{0.2}$$

Vi vet enligt teorin för reguljära Sturm-Liouvilleproblem att egenfunktionerna $X_n(x) = \cos(\alpha_n x)$ och $X_m(x) = \cos(\alpha_m x)$ är ortogonala på $0 < x < 1$ med avseende på vår vanliga skalärprodukt med viktsfunktion $= 1$, då $m \neq n$, dvs

$$\int_0^1 \cos(\alpha_n x) \cos(\alpha_m x)\, dx = 0.$$

Multiplicera nu båda led i (0.2) med $\cos(\alpha_m x)$ och integrera över $0 < x < 1$. I vänsterledet får vi

$$\int_0^1 1 \cdot \cos(\alpha_m x)\, dx = \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m}.$$

I högerledet blir samtliga termer, förutom den m:e, lika med 0 pga av ortogonaliteten. Den ickeförsvinnande termen blir

$$c_m \int_0^1 \cos^2(\alpha_m x)\, dx = \frac{c_m}{2} \left(\int_0^1 1 + \cos(2\alpha_m x)\, dx \right) = \frac{c_m}{2} + \frac{c_m \sin 2\alpha_m}{4\alpha_m}.$$

Jämför vi nu vänster och högerledet så erhålls

$$c_m = \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} \Bigg/ \frac{2\alpha_m + \sin 2\alpha_m}{4\alpha_m} = \frac{4 \sin \alpha_m}{2\alpha_m + \sin 2\alpha_m} = \frac{1}{\alpha_m} \cdot \frac{2 \sin \alpha_m}{1 + \sin^2 \alpha_m}.$$

Den sista likheten erhålls genom att utnyttja reltionen $\tan \alpha_m = 1/\alpha_m$. Vår lösning blir följdaktligen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{2 \sin \alpha_n}{1 + \sin^2 \alpha_n} \right) \cos(\alpha_n x) e^{-\alpha_n t}.$$