MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd Matematik
Examinator: Jesper Tidblom

Tentamen i
Lineär analys pk, MA 318
Onsdagen den 17 Januari 2007

Varje tal kan ge 4 poäng. Det totala poängantalet är 24. 12 poäng ger säkert godkänt. Lycka till !

1. Låt funktionen $f(x)$, vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) (1.5p) Bestäm Fourierintegralen för $f(x)$.

b) (1.5p) Bestäm Fourierserien för $f(x)$ på intervallet $-1 < x < 1$.

c) (1p) Den beräknade Fourierserien i b) är en väldefinierad funktion för alla reella x. Beskriv denna funktion (dvs ange vilka värden den antar för alla reella x).

2. (4p) Finn samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville problemet

$$x^5 y''(x) + 5x^4 y'(x) + \lambda x^3 y(x) = 0,\ y(1) = y(e) = 0,\ 1 \leq x \leq e.$$

Vilken ortogonalitetsegenskap har egenfunktionerna ?
Ledning : Sätt $x = e^s$.

3. (4p) Lös värmeekvationen

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 1,\ u(\pi,t) = 2,\ t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0,$$

4. Jacobis differentialekvation lyder

$$\frac{d}{dx}\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\right) + \lambda(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y = 0.$$

Man kan visa att egenvärdena är $\lambda = n(n + \alpha + \beta + 1)$ och att för varje heltal $n \geq 0$ hör en egenfunktion som är ett polynom $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ av grad n.
Dessa bildar en ortogonal familj och har nollskild norm givet skalärprodukten

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx$$

dvs

$$(P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)) = 0 \text{ om } m \neq n$$
$$(P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) \neq 0.$$

a) (3p) Beräkna de tre första normaliserade egenfunktionerna (av grad $0, 1$ och 2) i fallet $\alpha = \beta = 1$ genom att utnyttja ovan beskrivna ortogonalitetsegenskap.

b)(1p) Man kan också visa att de normaliserade egenfunktionerna $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, där $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{||P_n^{(\alpha,\beta)}||}$, bildar ett komplett ON-system på intervallet $[-1, 1]$ (givet samma skalärprodukt som ovan). Vad säger oss Parsevals sats i fallet med denna funktionsfamilj ?

5. (4p) Lös Laplaceekvationen

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad x > 0,\ y > 0$$
$$u(0, y) = 0,\ |u(x, y)| < M,\ (\text{för något } M > 0)$$
$$u(x, 0) = e^{-\gamma x},\ x > 0 \quad (\text{för något } \gamma > 0)$$

6. (4p) Lös det tvådimensionella värmespridningsproblemet

$$u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t),\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0$$
$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(\pi, y, t) = u(x, \pi, t) = 0$$
$$u(x, y, 0) = 1$$

Ledning : Ansätt $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$.

Skrivningsåterlämning sker fredagen den 19/1 kl 10 i kafeterian i hus 5. Därefter finns skrivningarna hos Tom Wollecki i hus 6.

Trigonometriska formler :

$$\begin{aligned}
2\sin a \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\
2\cos a \cos b &= \cos(a-b) + \cos(a+b) \\
2\sin a \cos b &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b
\end{aligned}$$