Lösningsförslag till tentamen i Linjär analys pk, 17 Januari 2007.

1. a) Fourierintegralen för en funktion $f(x)$ ges av uttrycket

$$f(x) \sim \int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\, d\alpha,$$

där

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx.$$

Vi får

$$\pi A(\alpha) = \int_{-1}^0 \cos\alpha x\, dx + \int_0^1 (1-x)\cos\alpha x\, dx = \int_{-1}^1 \cos\alpha x\, dx - \int_0^1 x\cos\alpha x\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_{-1}^1 - \left(\left[\frac{x\sin\alpha x}{\alpha}\right]_0^1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \sin\alpha x\, dx\right)$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}.$$

och

$$\pi B(\alpha) = \int_{-1}^0 \sin\alpha x\, dx + \int_0^1 (1-x)\sin\alpha x\, dx = -\int_0^1 x\sin\alpha x\, dx \text{ (ty } \sin\alpha x \text{ udda)}$$

$$= \left[\frac{x\cos\alpha x}{\alpha}\right]_0^1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \cos\alpha x\, dx = \frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_0^1 = \frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}.$$

Fourierintegralen blir därmed

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right)\cos\alpha x + \left(\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right)\sin\alpha x\, d\alpha.$$

b) Fourierserien till funktionen $f(x)$ på intervallet $-1 < x < 1$ ges av uttrycket

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n\cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\right),$$

där

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x)\cos n\pi x\, dx, \; b_n = \int_{-1}^1 f(x)\sin n\pi x\, dx.$$

Vi kan här utnyttja beräkningarna i a) uppgiften, genom att notera att $a_n = \pi A(\pi n)$ och $b_n = \pi B(\pi n)$ ($A(\alpha)$ och $B(\alpha)$ som i a) delen). Vi erhåller direkt

$$a_n = \frac{\sin n\pi}{n\pi} + \frac{1 - \cos n\pi}{\pi^2 n^2} = \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

och

$$b_n = \frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

samt

$$a_0 = \int_{-1}^{0} 1\,dx + \int_0^1 1 - x\,dx = 1 + 1/2 = 3/2.$$

Sammantaget får vi alltså

$$f(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x \right),$$

c) Den i b) beräknade Fourierserien konvergerar mot $f(x)$ punktvis i intervallet $-1 < x < 1$. I ändpunkterna -1 och 1 konvergerar den mot $1/2$. För övriga x konvergerar den mot den periodiska utvidgningen (av period 2) av ovan beskrivna funktion.

2. Vi substituerar $x = e^s \Leftrightarrow s = \ln x$ i ekvationen. Vi får med hjälp av kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{1}{x} = \frac{dy}{ds}e^{-s}$$

och

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}e^{-s}\right) = \frac{d^2y}{ds^2}e^{-2s} - \frac{dy}{ds}e^{-2s}.$$

Insatt i vår ekvation ger detta

$$\frac{d^2y}{ds^2} + 4\frac{dy}{ds} + \lambda y = 0.$$

Våra nya randvillkor blir

$$y|_{s=0} = y|_{s=1} = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen blir $r^2 + 4r + \lambda = 0$, så $r = -2 \pm \sqrt{4 - \lambda}$. Vi får därmed den allmänna lösningen

$$y = C_1 e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})s} + C_2 e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})s},$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.
Ena randvillkoret, med $s = 0$, ger oss att $C_2 = -C_1$, så

$$y = C_1 \left(e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})s} - e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})s} \right).$$

För att det andra randvillkoret ska vara uppfyllt krävs att

$$e^{-2+\sqrt{4-\lambda}} = e^{-2-\sqrt{4-\lambda}} \;\Leftrightarrow\; e^{2\sqrt{4-\lambda}} = 1 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{4-\lambda} = 2\pi i n \Leftrightarrow \lambda = 4 + n^2\pi^2,$$

där $n = 1, 2, \ldots$ ($n = 0$ ej tillåten, ty det skulle ge oss $y \equiv 0$).
De motsvarande egenfunktionerna blir då

$$y_n = C_1 \left(e^{(-2+in\pi)s} - e^{(-2-in\pi)s} \right)$$

$$= D_1 e^{-2s} \frac{e^{in\pi s} - e^{-in\pi s}}{2i} = D_1 e^{-2s} \sin n\pi s,$$

där D_1 är en ny godtycklig konstant.
Återgår vi till ursprungsvariablen, x fås

$$y_n(x) = D_1 x^{-2} \sin(n\pi \ln x).$$

Den ursprungliga ekvationen kan skrivas som

$$\left(x^5 y'(x)\right)' + \lambda x^3 y(x) = 0$$

och utgör tillsammans med randvillkoren ett reguljärt Sturm-Liouville problem. Teorin för dessa säger oss att egenfunktionerna är ortogonala mot varandra med avseende på skalärprodukten

$$(f, g) = \int_1^e f(x) g(x) x^3 \, dx.$$

3. Vi har icke-homogena randvillkor i vår givna värme-ekvation. Vi kan därför inte omedelbart använda oss av tekniken med separation av variabler. Ansätt därför $u(x,t) = U(x,t) + \Phi(x)$ i värme-ekvationen :

$$U_t(x,t) = U_{xx}(x,t) + \Phi''(x)$$

Om $\Phi''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi(x) = Ax + B$, så uppfyller $U(x,t)$ samma värme-ekvation som u :

$$U_t(x,t) = U_{xx}(x,t). \tag{0.1}$$

Vi ska nu bestämma konstanterna A och B så att randvillkoren för U blir homogena :

$$u(0,t) = 1 \;\Leftrightarrow\; U(0,t) + \Phi(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; U(0,t) + B = 1$$

Väljer vi $B = 1$ fås $U(0,t) = 0$.

$$u(\pi,t) = 2 \;\Leftrightarrow\; U(\pi,t) + \Phi(\pi) = 2 \;\Leftrightarrow\; U(\pi,t) + A\pi + 1 = 2$$

Väljer vi $A = 1/\pi$ fås $U(\pi,t) = 0$.
Det sista villkoret (initialvärdena) ger oss

$$0 = u(x,0) = U(x,0) + \Phi(x) \;\Leftrightarrow\; U(x,0) = -\Phi = -(\frac{x}{\pi} + 1)$$

Ansätt nu $U(x,t) = X(x)T(t)$ i (0.1). Detta ger oss tillsammans med randvillkoren de två hjälpekvationerna

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\; X(0) = X(\pi) = 0 \tag{0.2}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{0.3}$$

Enligt sats från boken kan vi utesluta negativa egenvärden för ekvation (0.2). $\lambda = 0$ är inte heller möjligt, ty det ger oss $X(x) \equiv 0$.
Vi sätter därför som vanligt $\lambda = \alpha^2, \alpha > 0$ och utrycker den allmänna lösningen till (0.2) som

$$X(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

. Villkoret $X(0) = 0$ ger $C_2 = 0$. Villkoret $X(\pi) = 0$ ger då

$$\sin \pi\alpha = 0 \iff \alpha = n \iff \lambda_n = n^2.$$

Motsvarande egenfunktioner blir därmed $X_n(x) = \sin nx$. Vår andra ekvation får givet att $\lambda_n = n^2$ lösningen

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$$

. Genom superposition får vi att

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Initialvillkoret för U ger oss att

$$-(\frac{x}{\pi} + 1) = U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Vi har alltså en sinusserie. Vi beräknar koefficienterna b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -(\frac{x}{\pi} + 1) \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \left(\left[\frac{-x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi^2} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n\pi} = \frac{4(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Vi får

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} \right) e^{-n^2 t} \sin nx$$

och därmed

$$u(x,t) = \frac{x}{\pi} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} \right) e^{-n^2 t} \sin nx.$$

4. a) Vi har skalärprodukten

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) (1 - x^2) \, dx$$

och ska bestämma tre polynom

$$P_0(x) = a, P_1(x) = bx + c, P_2(x) = dx^2 + ex + f,$$

som ska vara ortogonala mot varandra och ha norm= 1 Vi börjar att bestämma a :

$$1 = (P_0(x), P_0(x)) = a^2 \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx = a^2 \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vidare erhålls

$$0 = (P_0(x), P_1(x)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} (bx + d)(1 - x^2) \, dx = \frac{d\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx,$$

vilket ger oss att $d = 0$ (vi har ovan utnyttjat att integralen av alla udda funktioner över intervallet $[-1, 1]$ är noll).
Vi fortsätter

$$1 = (P_1(x), P_1(x)) = b^2 \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2) \, dx = b^2 \cdot \frac{4}{15} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Vi har erhållit att $P_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $P_1(x) = \frac{\sqrt{15}}{2}x$.
För $P_2(x)$ har vi :

$$0 = (P_0(x), P_2(x)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} (dx^2 + ex + f)(1 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} (dx^2 + f)(1 - x^2) \, dx = \frac{d\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{15} + \frac{f\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}.$$

Detta ger att $d = -5f$. Vidare fås

$$0 = (P_1(x), P_2(x)) = \text{konst.} \cdot \int_{-1}^{1} (dx^3 + ex^2 + fx)(1 - x^2) \, dx$$

$$= \text{konst.} \cdot e^2 \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2) \, dx$$

. Detta ger att $e = 0$. Slutligen får vi att

$$1 = (P_2(x), P_2(x)) = \int_{-1}^{1} (dx^2 + ex + f)^2(1 - x^2) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-5fx^2 + f)^2(1 - x^2) = f^2 \frac{4}{21},$$

så $f = \frac{\sqrt{21}}{2}$ och därmed fås $d = -\frac{5\sqrt{21}}{2}$. Polynomen blir därmed

$$P_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, P_1(x) = \frac{\sqrt{15}}{2}x \text{ och } P_2(x) = -\frac{5\sqrt{21}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

b) Parsevals sats säger oss att för varje f i vårt funktionsrum, där familjen $\left\{Q_n^{\alpha,\beta}\right\}_{n=0}^{\infty}$ är komplett, så gäller att

$$(f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, Q_n^{\alpha,\beta})^2$$

(där skalärprodukten är den som beskrivs i uppgift 4).

5. Vi ansätter $u(x,t) = X(x)Y(y)$ i ekvationen och erhåller då de två hjälpekvationerna

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = 0 \tag{0.4}$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \tag{0.5}$$

Där vi dessutom kräver att lösningarna ska vara begränsade.
Om $\lambda < 0$ är den generella lösningen till den övre ekvationen

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Eftersom lösningarna ska vara begränsade måste C_1 vara lika med 0. Villkoret $X(0) = 0$ tvingar oss sedan att välja $C_2 = 0$. Följdaktligen har vi inga negativa egenvärden. $\lambda = 0$ utesluts också ty det ger oss lösningen $X(x) = x$, som ej är begränsad.
Sätt $\lambda = \alpha^2, \alpha > 0$. Den generella lösningen till (0.4) blir då

$$X(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

Villkoret $X(0) = 0$ ger oss att $C_2 = 0$. Egenfunktionerna blir

$$X_\alpha(x) = \sin \alpha x,\ \alpha > 0.$$

Ekvationen (0.5) har då den generella lösningen

$$Y(y) = D_1 e^{\alpha y} + D_2 e^{-\alpha y}$$

Vi har tvingas välja $D_1 = 0$ om lösningen ska vara begränsad. Superposition ger att

$$u(x,y) = \int_0^\infty B(\alpha) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha$$

är en lösning. Nu ska vi bestämma $B(\alpha)$ så att vårt initialvärdesvillkor blir uppfyllt :

$$e^{-\gamma x} = u(x,0) = \int_0^\infty B(\alpha) \sin \alpha x \, dx.$$

Vi har nu en sinusintegral och vi vet att vi kan bestämma $B(\alpha)$ genom att beräkna

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma x} \sin \alpha x \, dx$$

Eulers formler ger

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma x} \sin \alpha x \, dx = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty e^{(-\gamma + i\alpha)x} - e^{(-\gamma + i\alpha)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi i} \left(\left[\frac{e^{(-\gamma+i\alpha)x}}{-\gamma + i\alpha} \right]_0^\infty - \left[\frac{e^{(-\gamma-i\alpha)x}}{-\gamma - i\alpha} \right]_0^\infty \right) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{\gamma - i\alpha} - \frac{1}{\gamma + i\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{\gamma^2 + \alpha^2}.$$

Vår sökta lösning blir därmed

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\gamma^2 + \alpha^2} e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

6. Vi ansätter $u(x,y,z) = X(x)Y(y)T(t)$ och får likheterna

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

och

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + \lambda = -\mu$$

Detta ger, tillsammans med randvillkoren, upphov till ekvationerna

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X(\pi) = 0, \tag{0.6}$$

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0,\ Y(0) = Y(\pi) = 0, \tag{0.7}$$

och

$$T'(t) + (\lambda + \mu)T(t) = 0. \tag{0.8}$$

Vi vet från sats i boken att alla egenvärden till de två första ekvationerna är icke-negativa. Här är de också strikt positiva, ty $\lambda = 0$ ger bara upphov till nollösningen.
Sätt $\lambda = \alpha^2, \alpha > 0$. Den generella lösningen till (0.6) är

$$X(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

Villkoret $X(0) = 0$ medför att $C_2 = 0$ och villkoret $X(\pi) = 0$ ger oss att $\alpha = n, n = 1, 2, \ldots$ Ekvation (0.7) är identisk med ekv. (0.6), förutom namnet på symbolerna. Vi har alltså

$$X_n(x) = \sin nx, \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$Y_m(y) = \sin my, \quad \mu_m = m^2, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Lösningen till (0.8) blir då

$$T(t) = Ce^{-(n^2+m^2)t}.$$

och vår generella lösning

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} e^{-(n^2+m^2)t} \sin nx \sin my.$$

Vi bestämmer nu konstanterna $C_{m,n}$ så att vårt initialvärdesvillkor blir uppfyllt :

$$1 = u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \sin nx \sin my = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin my,$$

där

$$c_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \sin nx.$$

Samtidigt vet vi att c_m ges av

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin my \, dy = \frac{2(1 - (-1)^m)}{\pi m}.$$

Vi får

$$\frac{2(1-(-1)^m)}{\pi m} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \sin nx,$$

vilket ger oss att

$$C_{m,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2(1-(-1)^m)}{\pi m} \cdot \sin nx \, dx = \frac{2(1-(-1)^m)}{\pi m} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}.$$

Vår lösning blir därför

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^m)}{\pi m} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} e^{-(n^2+m^2)t} \sin nx \sin my$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-((2n-1)^2+(2m-1)^2)t} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \frac{\sin(2m-1)y}{2m-1}.$$